


PIZZOFALCONE

LEZIONI ELEMENTARI

DI

MATEMATICHE

DEL SIGNOR AB. MARIE

PARTE II.



LEZIONI ELEMENTARI
DI MATEMATICHE
DEL SIG. AB. MARIE

TRADOTTE ED ILLUSTRATE

DA STANISLAO CANOVAI E GAETANO DEL RICCO

DELLE SCUOLE PIE

SETTIMA EDIZIONE

ARRICCHITA DI AGGIUNTE E DI APPLICAZIONI

E DISPOSTA CON NUOVO ORDINE

DA GIOVANNI INGHIRAMI

DELLE SCUOLE PIE

PARTE II.







FIRENZE
NELLA STAMPERIA CALASANZIANA
1825.







SAGGIO ANALITICO SULLE SEZIONI CONICHE

724. Si chiamano *sezioni coniche* le sezioni fatte in un cono per un piano dato. Così il circolo è una sezione conica, perchè tagliandosi un cono retto con un piano parallelo alla base, la sezione è circolare (595). Il triangolo è pure una sezione conica, perchè tagliandosi comunque un cono dal vertice fino alla base, la sezione è triangolare. Ma il nome di sezioni coniche è stato dato propriamente a tre altre sezioni del cono, diverse da queste due, delle quali più specialmente ci proponiamo parlare, dopo aver accennati i principj necessarj a trattarle analiticamente.



Nozioni preliminari sull' uso dell' Algebra nella descrizione delle curve.

725. Dal punto fisso A, considerato come punto
d' origine, parta la retta indefinita AM, sulla quale 123
sieno prese le porzioni o *ascisse* (534) AB, AC, AD ec. Da ognuno dei punti B,C,D, ec. si alzino ad angolo qualunque le parallele ovvero *ordinate* BP, CQ,DR ec. prolungate in maniera, che regni sempre un determinato rapporto fra ciascuna ascissa e l'ordinata corrispondente; cosicchè chiamate l'una x, l'altra y, i valori d'ambedue (424) soddisfacciano insieme ad una data equazione, come per esempio ad $y^2=2ax-x^2$. In tal caso l'estremità delle ordinate y si disporranno in una linea, che generalmente sarà una curva, la di cui natura ed indole varieranno a seconda della diversa qualità dell'equazione di rapporto, che per-

125 ciò si chiama *equazione della curva*. Data quest' equazione l' Algebra non solo insegna a descriver la curva corrispondente, ma ne sviluppa ancora le principali proprietà con maravigliosa prontezza.

726. Le ascisse e le ordinate si chiamano con nome comune *coordinate*, e diconsi di più *ortogonali*, allorchè il loro angolo è retto, come sempre lo supporremo per l'avvenire, quando altro non si avverta. La linea sulla quale si prendon l'ascisse si chiama *asse della curva* o *delle ascisse* o delle x; come per analogia si chiama *asse delle ordinate* o delle y, la retta indefinita AN condotta per il punto d'origine A parallelamente alle ordinate. Nè sempre l'origine A cade sull' estremità dell'asse delle ascisse, ma può stabilirsi in qualunque altro punto del medesimo; se non che allora, considerate come positive le ascisse prese da una parte dell' origine, debbon riguardarsi come negative quelle prese dalla parte opposta (109): siccome egualmente l' ordinate possono aver luogo tanto al disopra che al di sotto dell'asse, purchè in un senso si assumano positive, e nell'altro negative. Vi sono infine delle curve chiamate *polari*, nelle quali l'asse delle ascisse è una circonferenza, le ascisse sono archi, e le ordinate sono porzioni o prolungamenti di raggi compresi dal centro fino all' incontro con la curva. Ne daremo più chiare nozioni a suo luogo.

727. Si fa uso delle coordinate anche per assegnare con distinzione il luogo, che un punto occupa sopra di un dato piano. Premetto che l' idea di posizione essendo un' idea di puro
124 rapporto, come quelle di lunghezza o di estensione, non può giungersi a chiaramente assegnare la situazione di un punto B, se non riferendola a quella di un altro punto A che si supponga già nota. Al che non basta l' indizio della sola distanza AB; poichè a questa medesima distanza da A si trovano, oltre B, tutti i punti della circonferenza descritta col centro in A e

raggio AB. Ma se condotto comunque per A l'asse indefinito AP, 124
scenderemo da B su di quest'asse con la normale BC, e daremo il valore e la direzione dell'ascissa AC e dell'ordinata BC, la posizione di B resterà decisamente determinata, essendo troppo chiaro che le due coordinate AC, BC nel senso in cui si son prese, non competono che al punto B. Questo mezzo é usitatissimo tra gli Astronomi ed i Geografi, allorché vogliono indicare sulla sfera celeste o sul globo o sulle mappe la situazione dei diversi punti celesti o terrestri. Si vedano i loro trattati.

728. In luogo delle coordinate suddette si può anche assegnare la posizione del punto B mediante la distanza AB, e l'angolo che la retta AB fa con l'asse delle ascisse o delle ordinate. Chiamato θ il primo di questi due angoli, r la distanza AB, e supposte infine ortogonali (726) le coordinate x, y queste si cangiano allora in $r\cos\theta$, $r\,\mathrm{sen}\,\theta$. E oppostamente per l'angolo θ e per la distanza r, si ha $\mathrm{tang}\,\theta = \frac{y}{x}$ ed $r = \sqrt{(x^2 + y^2)}$.

729. Ma sia B un punto préso non più sopra una data superficie, ma bensì nello spazio assoluto, e se ne voglia la 125
posizione rapporto al punto noto A. Fatti concorrere in A due assi ortogonali AP, AQ, ed elevato sul punto medesimo anche un terzo asse AO normale al piano QAP, e perciò anche ai due assi AQ, AP (582), si scenda da B sul piano QAP con la normale BC, che sarà dunque parallela ad AO, e quindi si conduca da C la CD normale all'asse AP: è chiaro che le tre coordinate AD, DC, CB non potendo tutte insieme appartenere che al punto B, ne determineranno perciò definitivamente la posizione. Or le due coordinate AD, CD prese sul piano sogliono al solito indicarsi con x, y; l'altra CB, normale al piano, con z, e in coerenza di queste denominazioni i tre assi ortogonali concorrenti in A si chiamano respettivamente *assi delle* x, o *delle* y, o *delle* z, secondo la coordinata nel senso di cui son diretti. Il piano steso per i primi due assi si chiama *piano delle* x, y; come egualmente si chiamano *piani delle* x, z, o *delle* y, z quelli che in pari modo possono immaginarsi stesi per gli assi delle x e delle z, o per quelli delle y e delle z. Infine il punto C nel quale l'ordinata z scen-

125 dendo da B incontra il piano delle x, y si chiama *projezione ortogonale* di B, ed è evidente che questa stessa projezione potrebbe aver luogo anche sugli altri due piani.

730. E qui pure si osserverà che in vece di far uso delle tre coordinate x, y, z può determinarsi la situazione di B rapporto ad A, anche col mezzo della distanza $AB=r$, e degli angoli $BAC=\theta$, $CAD=\omega$ fatti da AB con AC, projezione dell'intera AB sul piano delle x, y, e da AC con AP asse delle x. In tal caso i triangoli rettangoli ACB, ADC daranno $AC=r\cos\theta$, $BC=z=r\,sen\theta$, $CD=y=AC\,sen\omega=r\cos\theta\,sen\omega$, $AD=x=AC\cos\omega=r\cos\theta\cos\omega$; d'onde assai facilmente $r=\sqrt{(x^2+y^2+z^2)}$, $sen\theta=\frac{z}{r}$, $tang\,\omega=\frac{y}{x}$.

Che se oltre B si abbia un altro punto S, situato per altro nello stesso senso che B rapporto ai tre piani concorrenti sull'origine A, e voglia riferirsi B ad S, chiamate come sopra x, y, z le coordinate che riferiscono B ad A, ed x', y', z' quelle che vi riferiscono S, saranno manifestamente $x \backsim x'$, $y \backsim y'$, $z \backsim z'$ quelle che riferiscono B ad S, e si avrà $BS=\sqrt{((x \backsim x')^2+(y \backsim y')^2+(z \backsim z')^2)}$. Se poi S fosse situato del tutto oppostamente a B rapporto a ciascuno dei tre piani suddetti, converrebbe cangiar le differenze $x \backsim x'$, $y \backsim y'$, $z \backsim z'$ nelle somme $x+x'$, $y+y'$, $z+z'$, il che darebbe $BS=\sqrt{((x+x')^2+(y+y')^2+(z+z')^2)}$. Che se la situazione di S non fosse opposta a quella di B se non rapporto a uno o due piani, il cangiamento non caderebbe che sulla differenza delle ordinate perpendicolari ai piani medesimi. E' facile il persuadersi della verità di questi precetti, anche indipendentemente da ogni figura che riescirebbe di eccessiva complicazione. Torniamo alle curve.

731. L'equazione $y^2=2ax-xx$ è alla circonferenza di un circolo del raggio a (536): ma quando non si
126 sappia, la costruzion di quest'equazione guiderà a descriverlo, e lo farà facilmente conoscere. Sia $a=5$, e condotta una retta indefinita BD sulla quale prendo $AD=2a=10$, la divido in dieci parti eguali AP, PP, ec. Sia A l'origine dell'ascisse, BD il loro

asse, AD la parte delle positive, AB sarà quella delle negative, se la curva cercata ne abbia. Dipoi conducasi al punto A la perpendicolare indefinita EF che prendo per asse delle ordinate, e di cui suppongo positiva la parte AE. Sia finalmente $AP=x$, $PM=y$. E' chiaro per l' equazione medesima $y=\pm\sqrt{(2ax-xx)}$, che quando $x=0$, si ha $y=c$; dunque la curva ha il punto A comune colla linea dell' ascisse. Se $x=1$, $y=\pm 3$, se $x=2$, $y=\pm 4$, e i valori corrispondenti di x e di y sono 126

$x=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10$

$y=0, \pm 3, \pm 4, \pm\sqrt{21}, \pm\sqrt{24}, \pm 5, \pm\sqrt{24}, \pm\sqrt{21}, \pm 4, \pm 3,\ 0$

I valori di y determinan la lunghezza d'altrettante ordinate le cui estremità M son tanti punti della curva cercata, che verrà tanto più esattamente descritta quanto maggiormente si moltiplicheranno le divisioni di AD. Inoltre poichè i valori di y son positivi e negativi, la curva ha dunque due *rami* eguali, l' uno che passa per i punti M al di sopra dell'asse dell'ascisse, e l'altro per i punti corrispondenti M' al di sotto. Infine crescendo i valori di y fino a un certo termine che è 5, e decrescendo in seguito colla proporzione medesima fino a zero, si dee concludere 1.° che vi è un' ordinata maggiore di tutte l'altre o *Massima:* 2.° che la curva dell' equazione $y^2=2ax-xx$ è *rientrante* o *chiusa:* 3.° che non si stende di qua dal punto A, poichè allora le sue ascisse essendo negative, i valori di y sarebbero *immaginarj*. Cerchiamone qualche proprietà.

732. Dal mezzo C della linea AD conduco delle rette CM e ho tanti triangoli rettangoli CPM, in cui $CM^2=PM^2+CP^2=y^2+a^2-2ax+x^2$; onde essendo $y^2=2ax-x^2$, si avrà sempre $CM=a$, cioè tutti i punti M sono ad egual distanza dal centro C (423.3.°).

Inoltre l'equazione $y^2=2ax-x^2$ dà $x:y::y:2a-x$,
126 ovvero AP : PM::PM:PD; dunque ogni perpendicolare PM è media proporzionale tra i due segmenti AP, PD (535). Di più condotta una corda AM, si avrà $AM^2=AP^2+PM^2=x^2+y^2=2ax$, onde $x:AM::AM:2a$; cioè nella curva trovata tutte le corde condotte dal punto A ad uno dei punti M son medie proporzionali tra AD e il segmento corrispondente AP(529.3.°) Condotta pure MD, si avrà $AM^2+MD^2=2ax+(2a-x)^2+y^2=4a^2=AD^2$, proprietà del triangolo rettangolo; dunque tutti gli angoli AMD son retti (492.2.°).

733. Si debba ora descrivere la curva dell'equazione $y^2=ax$. Già si vede che questa dee tagliar la linea dell'ascisse nella loro origine, poichè fatta $x=0$, si ha anche $y=\pm\sqrt{ax}=0$, e di più che dee aver due rami eguali, uno positivo e l'altro negativo. Inoltre poichè comunque si aumenti x, purchè si mantenga positiva, y resta sempre reale, e sempre cresce di valore senza giammai tornare ad essere zero, perciò niuno dei rami toccherà mai più l'asse, da cui continuamente ambedue si scosteranno: onde a differenza del circolo questa curva non sarà rientrante. Infine siccome facendo x negativa, y risulta immaginaria, dunque dalla parte negativa dell'asse non vi
127 è curva, la quale avrà quindi la forma MAM'.

734. Sia pure $y^2=x^2-a^2$: facendo $y=0$, si ha
128 $x=\pm a$, onde preso sull'indefinita BD un punto A per origine dell'ascisse, e due parti AS, As eguali ad a, la curva dee passar per i punti S, s che si chiamano i suoi *vertici*. Inoltre poichè $y=\pm\sqrt{(x^2-a^2)}$, e quest'equazione riman la stessa cangiandovi x in $-x$, perciò la curva ha quattro rami eguali ed opposti, due dalla parte positiva, e due dalla parte negativa dell'asse. Di più poichè posto $x<a$ risulta y imma-

g'naria, perciò non vi è curva fra i vertici S ed *s*. Oppostamente ponendo $x>a$, y è sempre reale, e cresce sempre crescendo x; perciò i quattro rami al di là dei due vertici crescono indefinitamente, nè più s'incontrano con l'asse; onde neppur questa curva è rientrante, ed ha la forma della fig.ª 128.

735. Cerchiamo la curva dell' equazione $y^2=\frac{bx^2+x^3}{a-x}$. Si 129
ha dunque $y=\pm x\sqrt{\frac{b+x}{a-x}}$ se x è positiva, ed $y=\mp x\sqrt{\frac{b-x}{a+x}}$ se è negativa: onde x positiva non può eccedere a, e negativa non può ecceder b; senza ciò y sarebbe immaginaria. Prendo BD per linea dell' ascisse, AD$=a$ per la direzione delle positive, AB$=b$ per quella delle negative, il punto A per la loro origine, EF per l'asse dell'ordinate, e ho 1.° $y=0$ quando $x=0$, onde la curva passa per il punto A; 2.° ad ogni valor di x ne trovo due per y, onde vi sono ordinate positive e negative: 3.° i due valori PM, PM′ di y crescon sempre finchè presa $x=a$, divengono infiniti, poichè allora $y=\pm x\sqrt{\frac{b+x}{0}}=\infty$; cioè bisogna prolungare all' infinito HG perchè incontri i due rami della curva; 4.° se x è negativa, y ha due valori finchè $x<b$, e la curva ha due rami anche in senso negativo; 5.° $x=b$ dà $y=0$; onde la curva passa per B, ma non può scender più basso; 6.° se $y=0$, si ha $x^2\left(\frac{b-x}{a+x}\right)=0$, onde $x^2(b-x)=0$, che dà $x=0$, $x=0$, $x=b$, e però la curva passerà una volta per il punto B, e due volte per A ove formerà un *nodo* (quando due, tre o più rami della curva passano per lo stesso punto, questo si chiama *punto doppio*, *triplo*, *multiplo*, e l' Algebra insegna a discerner questi punti e a conoscerne la moltiplicità); 7.° se $b=0$, il nodo svanisce, e l' equazione diviene $y^2=\frac{x^3}{a-x}$ che appartiene a una curva detta *cissoide*.

736. Oltre i punti multipli vi sono ancora dei punti d' *in-* 130
flessione: in quei di *flesso contrario* la curva dopo essere

stata convessa in un senso, comincia ad esserlo nel senso op-
130 posto, come MAM′: ma in quelli di *regresso* un ramo della curva tocca l'altro e torna indietro, come *mAm′*: in ambedue la tangente è anche secante nel punto A d'inflessione, e la curva è parte di qua e parte di là dalla tangente.

737. Se l'equazione delle coordinate è del primo grado, ella appartiene sempre, come vedremo, ad una linea retta, e però le rette si chiaman *linee del primo genere* o del *primo ordine*: se è del secondo grado, del terzo ec., le linee si chiaman del *secondo*, del *terzo genere* ec.; e le linee del secondo si chiamano anche *curve del primo genere*, quelle del terzo *curve del secondo* ec. Vi son quattro linee del second' ordine, settantadue del terzo; quelle del quarto sono in più gran numero ec.

738. In questa division di linee in varj ordini, si comprendono le sole curve *geometriche*, cioè quelle che hanno delle rette per ascisse e per ordinate, la cui ragione può determinarsi geometricamente. Una curva che avesse per coordinate delle quantità trascendenti (10), non sarebbe geometrica, ma *meccanica* o *trascendente*. Le geometriche si chiamano anche *curve algebriche*.

739. Ora il principale oggetto dell'Analisi nell'esame d'una curva è 1.° di trovarne l'equazione quando la curva è data, o di descriverla quando se ne ha l'equazione: 2.° di determinarne la tangente: 3.° di conoscerne la *curvatura* in un punto dato: 4.° di cercarne le massime o minime ordinate; 5.° di trovarne la quadratura o esatta, se è possibile, o approssimata; 6.° di trovarne la rettificazione, cioè determinar la lunghezza d'una retta eguale ad un suo arco qualunque ec.

Origine ed Equazione delle Sezioni Coniche

131 740. Tagliato un cono BCD con un piano AMP, si cerca l'equazion della curva MA*m* che nasce da

questa Sezione. Se per il vertice B si fa passare un piano BCD perpendicolare alla base CD e al piano 131
segante AMP, l'intersezione di questi due piani sarà una retta Aa (581); inoltre tagliando il cono parallelamente alla base con un piano FMG si ha un circolo (595) il cui piano sarà, come la base, perpendicolare al triangolo BCD, e la cui intersezione PM col piano AMP sarà normale al piano triangolare BCD (593), e perciò alle due rette Aa, FG (582); onde PM è un'ordinata comune al circolo e alla sezione MAm. Sia dunque $AP=x$, $PM=y$, $AB=c$, l'angolo $ABa=B$, l'angolo $BAa=A$: il circolo dà $y^2=FP\times PG$ (535), e per trovare FP e PG, conduco AE parallela a CD, e PK parallela a BD, l'una e l'altra nel piano BCD: dunque (663) $sen\,AEB:AB::senB:AE=\frac{c\,sen B}{sen D}$. Inoltre $senAKP(=senD):senAPK(=senAaE=sen(A+B)$ (483)$)::x:AK=\frac{x\,sen(A+B)}{senD}$; dunque $PG=KE=AE-AK=\frac{c\,senB-x\,sen(A+B)}{senD}$. Infine $sen\,AFP(=senBFG$ (645.3.°)$):x::senA:FP=\frac{x\,senA}{senC}$;

onde $y^2=\frac{senA}{senC\;senD}(c\,x\,senB-x^2sen(A+B))$, equazione cercata, dalla quale intanto si apprende che in generale ad ogni ascissa x corrispondono sempre due ordinate y eguali ed opposte (109): onde l'asse divide in mezzo la sezione, la quale deve aver per lo meno due rami (731).

741. Sia frattanto $A+B<180°$; allora l'angolo CAP sarà maggiore dell'angolo B (429), e il piano segante AMP convergendo sul lato BD lo incontra in a (470), onde la Sezione è *rientrante* o chiusa. Ciò è

131 reso pur manifesto dall' equazione; poichè fatto $y=0$ si ha (208) $x=0$, $x=\frac{c\,sen B}{sen(A+B)}$, cioè si trova che la curva taglia l'asse in due punti (733); e siccome il triangolo ABa dà $\frac{c\,sen B}{sen(A+B)}=Aa$, i due punti son dunque l' uno all' origine A ove $x=0$ (731), l'altro in a al termine dell' asse Aa. Inoltre posto $Aa=2a$ l' equazione si converte assai facilmente in $y^2=$..... $\frac{sen A sen(A+B)}{sen C sen D}(2ax-x^2)$, la quale dà y immaginario nei casi di x negativa, o di $x>2a$. E' dunque chiaro che la curva è tutta compresa fra i punti A ed a. A questa curva si dà il nome di *ellisse*: l' intero asse Aa delle ascisse si denomina *asse primo, maggiore* o *trasverso*, come per analogia si chiama *asse secondo*, *minore* o *conjugato* la doppia ordinata corrispondente ad $x=a$, o alzata sul *centro* C della curva, ossia sulla metà dell'asse trasverso. Si rappresenti con b quest' ordinata: avremo dall' equazione, postovi $x=a$, $b^2=\frac{sen A\, sen(A+B)}{sen C\, sen D}a^2$, d' onde .... $\frac{sen A\, sen(A+B)}{sen C\, sen D}=\frac{b^2}{a^2}$ valore che introdotto nell'equazione la riduce alla forma semplicissima $y^2=\frac{b^2}{a^2}(2ax-x^2)$.

132 742. Secondariamente sia $A+B=180°$; allora l'angolo CAP è eguale all' angolo B (429), e il piano AMP è parallelo al lato BD (469); onde la sezione, che in tal caso si chiama *parabola*, non terminerà che alla base del cono, l'altezza del quale non essendo determinata da alcun limite, e potendo supporsi infinita, anche i due rami della curva potranno divenire infiniti. Or poichè $A+B=180°$ dà $sen(A+B)=0$, l' equazione alla nuova curva sarà $y^2=$ ......

$\frac{sen A\, sen B}{sen C\, sen D}\, cx$, ovvero $y^2 = px$, posto p in luogo del coefficiente $\frac{sen A\, sen B}{sen C\, sen D}\, c$, che si suppone tutto noto e costante. A questa costante p si dà il nome di *parametro* della curva; e come è chiaro deve equivaler sempre alla terza proporzionale dopo un' ascissa qualunque e la corrispondente ordinata; onde è sempre facile a ritrovarsi quando la curva sia data.

743. Finalmente sia nell' equazion generale $A + B > 180^\circ$, allora l' angolo CAP sarà minore dell' angolo B (429), il piano AMP divergerà dal lato BD (470), nè lo incontrerà se non si supponga prolungato oltre il vertice B, figurandoci cioè che le apoteme del cono dato, dopo essersi tagliate in B, proseguano ad estendersi anche al di sopra, e formino il nuovo cono *d*B*c*, eguale ed opposto al primo. In tal caso il piano segante che taglia il cono inferiore, steso al di sopra taglierà egualmente il superiore, ed avremo due sezioni staccate l' una dall' altra di tutto l' intervallo A*a*. Ora dal triangolo AB*a* abbiamo $c : Aa :: sen AaB : sen ABa$; e poichè conservando ad A, B gli stessi significati che sopra (740), si trova $sen ABa = sen(180 - B) = sen B$, $sen AaB = sen(B - aAB)$ (483) $= sen(B - (180 - A)) = sen(B + A - 180) =$ (642) $- sen(180^\circ - A - B) =$ (644) $- sen(A+B)$, dunque fatto come nell' ellisse $Aa = 2a$, avremo dalla proporzione precedente $\frac{c\, sen B}{sen(A+B)} = -2a$ valore che introdotto nell' equazion generale, darà per una prima trasformazione $y^2 = -\frac{sen A\, sen(A+B)}{sen C\, sen D}(2ax + x^2)$, ovvero (645. 4.°) $y^2 = \frac{sen A\, sen(360^\circ - A - B)}{sen C\, sen D}(2ax + x^2)$: ove dee

133 notarsi che essendo $A+B>180°$, *sen*$(360°-A-B)$ sarà sempre positivo (644), e quindi lo sarà in ogni caso il coefficiente costante del secondo membro. E poichè è desso composto di quantità tutte note, se per maggior semplicità, e come si praticò nell'ellisse (741), si rappresenti con $\frac{b^2}{a^2}$, l'equazione si trasformerà allora nell'altra $y^2=\frac{b^2}{a^2}(2ax+x^2)$, la quale assai ben manifesta i quattro rami della curva, e il voto che resta dall'una all'altra sezione, cioè per tutto il tratto Aa. Infatti y è reale finchè x è positiva, divien di nuovo reale con x negativa, purchè $>2a$, e solo è immaginaria quando si abbia x negativa e $<2a$, cioè fra i due vertici A, a. E qui pure come nell'ellisse si chiama *primo*, *maggiore* o *trasverso* l'asse $2a$; e *secondo*, *minore* o *conjugato* l'asse costituito da una doppia normale Bb elevata sul centro C della curva, ossia sulla metà dell'asse Aa, ed eguale in lunghezza a $2b$.

744. Le due equazioni dell'ellisse e dell'iperbola posson riunirsi nell'unica $y^2=\frac{b^2}{a^2}(2ax\mp x^2)$. Si faccia $\frac{2b^2}{a}=p$: avremo allora $y^2=px\mp\frac{px^2}{2a}$ equazione la quale non differisce da quella della parabola che per l'aggiunta del termine $\mp\frac{px^2}{2a}$. E poichè questo termine tanto più diminuisce quanto è più piccolo x, e più grande $2a$ (48), perciò *gli archi ellittici ed iperbolici tanto meno differiranno dai parabolici, quanto saran più prossimi al vertice ed avranno un più grand'asse trasverso*.

745. La costante p introdotta nella comune equa-

zione dell' ellisse e dell' iperbola conserva anche in essa, come in quella della parabola, il nome di *parametro* (742), se non che in queste due curve è terza proporzionale dopo i due assi. Ora una delle più importanti ricerche dell'attuale teoria è di trovare il valor dell'ascisse, o il luogo dell'asse a cui corrisponde un' ordinata eguale alla metà del parametro. Quanto alla parabola fatto $y=\frac{1}{2}p$ si ha immediatamente $px=\frac{1}{4}p^2$ ed $x=\frac{1}{4}p$. Quanto poi alle altre due curve si avrà $px \mp \frac{px}{2a}=\frac{1}{4}p^2$, ovvero $x \mp \frac{x^2}{2a}=\frac{1}{4}p=$ (744) $\frac{b^2}{2a}$, d'onde per il segno superiore, o per l' ellisse, otterremo $x=a \pm \sqrt{(a^2-b^2)}$, e per il segno inferiore, o per l'iperbola, $x=-a \pm \sqrt{(a^2+b^2)}$.

746. Nella parabola il punto cercato è dunque ad una distanza dal vertice eguale alla quarta parte del parametro. L' ellisse ne ha due che si troveranno 134
facendo scendere sull' asse trasverso dalla sommità B del conjugato due ipotenuse BF, Bf eguali alla metà dello stesso asse trasverso. Infatti questa costruzione darà $FC=fC=\sqrt{(a^2-b^2)}$, onde $AF=a-\sqrt{(a^2-b^2)}$, $Af=a+\sqrt{(a^2-b^2)}$. E due parimente ne ha l'iperbola, che si troveranno riunendo con l' ipote- 135
nusa BA la sommità B dell' asse conjugato con il vertice A della sezione, e quindi prendendo sull'asse trasverso al di qua e al di là del centro C le porzioni CF, Cf ambedue eguali a BA. Infatti poichè $BA=\sqrt{(a^2+b^2)}$, sarà $AF=CF-CA=\sqrt{(a^2+b^2)}-a$, ed $Af=Cf+CA=-\sqrt{(a^2+b^2)}-a$. Questi punti F, f si chiamano *fuochi*; il loro semi-intervallo CF si chiama *eccentricità*, che rappresenteremo con e, ed avremo $CF=e=\sqrt{(a^2 \mp b^2)}$.

747. Intanto si noterà che moltiplicando tra loro i due trovati valori di x nell'ellisse e nell'iperbola, si ottie-

ne $(a-\surd(a^2-b^2))\,(a+\surd(a^2-b^2))=(\surd(a^2+b^2)+a)\times(\surd(a^2+b^2)-a)=b^2$, cioè *il semiasse minore è medio proporzionale tra le distanze dell'un de' due fuochi ai due vertici*. Basti questo piccol saggio d' analogia tra le tre curve: per maggior chiarezza daremo separatamente il seguito delle lor proprietà.

Parabola

748. Poichè nella parabola abbiamo $y^2=px$ (742): dunque 1.° *i quadrati dell' ordinate son fra loro come le loro ascisse*.

749. Condotta dalla curva al fuoco F la retta o
136 *raggio vettore* MF, che chiameremo z, sarà $FM=z=\surd(MQ^2+FQ^2)=(742.746)\surd(px+(x-\frac{1}{4}p)^2)=x+\frac{1}{4}p=$ AQ+AF: prolungata dunque LA, se si prenda $AG=AF=\frac{1}{4}p$, e per G si conduca l'indefinita o *direttrice* hGe parallela all'ordinata MQ, sarà la normale MH$=$QG$=$FM; dunque 2.° *ciascun punto della parabola è ad egual distanza dalla direttrice e dal fuoco*.

750. Di qui la maniera di condurre una tangente a un punto dato M della parabola. Uniti F ed H, e condotta MT normalmente ad FH, se da qualunque punto m di MT diverso da M si conducano in oltre le Hm, Fm e la mh perpendicolare alla direttrice, il triangolo isoscele FMH darà (439) Fm=mH. E siccome il triangolo rettangolo mhH dà mH$>mh$ (530), dunque altresì F$m>mh$; onde il punto qualunque m di MT, comecchè più vicino alla direttrice che al fuoco non caderà sulla curva, la quale perciò non avrà comune con MT che il punto M. Dunque MT sarà tangente (461); e poichè le parallele FT, MH danno l'angolo FTM=TMH (471)=TMF (449.2.°), dunque anche il triangolo FTM è isoscele, e perciò FT=FM; quindi *presa* FT=FM *la retta* MT *condotta* per T *ed* M *sarà tangente in* M.

751. Prolungata in L la tangente MT, in O la normale MQ e condotta MN normale ad MT si avrà l'angolo LMO = QMT(431) = TMF (449.2.°), e quindi anche OMN = NMF (429.2.°). Dunque *tutti i raggi lucidi o sonori o calorifici* OM, *paralleli all'asse* AN *incontrando la parabola in* M *sotto l'angolo d'*incidenza OMN *dovran riflettersi per* MF *sul fuoco* F, sapendosi dalla Fisica che l'angolo di riflessione è eguale a quello dell'incidenza. 137

752. Poichè $FT = FM = x + \frac{1}{4}p$ (749), sarà $FT - \frac{1}{4}p = x = AT$ (746); dunque *la suttangente* $PT = 2x$ *è doppia dell' ascissa*. La *tangente* $MT = \sqrt{(px + 4x^2)} = 2\sqrt{xz}$; la *sunnormale* $PN = \frac{PM^2}{PT} = \frac{px}{2x} = \frac{1}{2}p$, onde *nella parabola la sunnormale è costante ed eguaglia la metà del parametro*. Infine la *normale* $MN = n = \sqrt{(px + \frac{1}{4}p^2)} = \sqrt{pz}$.

753. Se dal punto N, ove la normale incontra l' asse, si conducano ai raggi vettori FM, OM le perpendicolari NB, NB', i triangoli NBM, NB'M eguali (750) daranno $BM = MB' = PN = \frac{1}{2}p$: e se dal punto F si conduca sulla tangente TM la perpendicolare $FC = q$, sarà $MT : TC :: MN : FC$, e poichè $TC = \frac{1}{2}MT$ (449.1.°), sarà $FC = q = \frac{1}{2}n = \frac{1}{2}\sqrt{pz}$, e perciò $2qn = n^2 = pz$, ed $n = \frac{pz}{2q}$ espressione notabile della normale.

754. Il triangolo FMP dà $FM : FP :: 1 : \cos MFP$. Fatto dunque $MFT = \beta$, perciò $MFP = 180° - \beta$, e sostituiti i valori di $FM = x + \frac{1}{4}p$, di $FP = x - \frac{1}{4}p$ e di $\cos(180 - \beta) = $ (644) $-\cos\beta$, avremo $x + \frac{1}{4}p : x - \frac{1}{4}p :: 1 : -\cos\beta$; ossia $x + \frac{1}{4}p : \frac{1}{2}p :: 1 : 1 + \cos\beta$, d'onde $x + \frac{1}{4}p = z = \frac{p}{2(1+\cos\beta)} = \frac{p}{4\cos^2\frac{1}{2}\beta}$ (648.56ª), espressione del raggio vettore chiamata *angolare*, o *polare*, di cui si fa molto uso nell' Astronomia. Intanto ne dedurremo che, se collo stesso asse e fuoco si descriva

un' altra parabola A'M' del parametro p', sarà FM : FM' : : $p : p' :: FA : FA'$.

136 755. La parallela MO all'asse si chiama *diametro*, il punto M ne è l' *origine*; le sue ordinate son le rette NP parallele alla tangente in M, e le ascisse di queste ordinate son le rette MP. Per trovar l'equazione alle coordinate del diametro MO, chiamate MP (x), PN (y), $AQ=AT=a$ (752), avremo $MQ=\sqrt{ap}$, e fatto $p+4a=p'$ sarà $MT=PR=\sqrt{ap'}$ (752). Condotta ora NL normale all' asse, i triangoli simili NRL, MTQ daranno $\sqrt{ap'} : y+\sqrt{ap'} :: \sqrt{ap} : NL=y\sqrt{\frac{p}{p'}}+\sqrt{ap} :: 2a : RL=2y\sqrt{\frac{a}{p'}}+2a$. Ora $AR=RT-AT=x-a$; dunque $AL=x+a+2y\sqrt{\frac{a}{p'}}$, e per la proprietà della parabola, $NL^2=p\times AL$, cioè $(\sqrt{ap}+y\sqrt{\frac{p}{p'}})^2=ap+px+2py\sqrt{\frac{a}{p'}}$; e riducendo, $yy=p'x$, equazione simile alla trovata per l'asse; perciò qualunque diametro MO divide in mezzo l' ordinate Nn, e il suo parametro $p'=p+4a$ è quadruplo della distanza dell' origine M dal fuoco F (749).

138 756. Oltre l' equazione tra le coordinate, hanno i diametri molte altre proprietà comuni coll' asse. Si faccia in primo luogo passare per il fuoco F la doppia ordinata Nn. Avremo l' ascissa $ML=FT$ (473) $=a+\frac{1}{4}p$ (752) $=\frac{p'}{4}$ (755), distante cioè di una quarta parte del parametro p' dal vertice del diametro. Inoltre sarà $LN=\sqrt{p'x}=\sqrt{\frac{p'^2}{4}}=\frac{p'}{2}$, cioè la doppia ordinata che passa per il fuoco eguaglia il parametro: due proposizioni che si son trovate verificarsi anche rapporto all' asse (745).

139 757. Abbiasi la secante NIm, e dai punti N, I ove essa taglia la curva si conducano le ordinate $NE=y$, $SI=y'$. Poste x, x' le corrispondenti ascisse ed $Mm=b$, i triangoli SmI, NmE simili, daranno $mS : mE :: SI : NE$, ovvero $b+x : b+x' :: y : y' :: \sqrt{p'x} : \sqrt{p'x'}$. Quadrando e riducendo si troverà $(b^2+x^2)x'=(b^2+x'^2)x$, d'onde $b^2(x'-x)=xx'(x'-x)$,

e quindi $b^2 = xx'$: cioè *la parte esteriore del diametro, compresa fra l'origine e la secante, é media proporzionale fra le due ascisse*. 139

758. Or supponiamo che i punti N, I si avvicinino fra loro fino a coincidere in un sol punto M. La secante si cangerà 140
allora in tangente, e le due ascisse x, x' diverranno ciascuna eguali ad AR. Avremo in tal caso $b^2 = mA^2 = AR \times AR = AR^2$, e quindi $mA = AR$. Dunque $mR = mA + AR = 2AR$: cioè *la suttangente è doppia dell' ascissa*, come per l'asse (752).

759. Ciò dà la maniera di condurre una tangente mM da un punto dato m fuori della curva. Fatto passar per m il diametro mE e presa $AR = mA$, si applichi in R l' ordinata RM parallelamente ad AG tangente in A (755). Uniti m, M è chiaro per le cose dette che mM sarà tangente.

Può peraltro a questa stessa ricerca soddisfarsi ancor 136
più semplicemente nella guisa che segue. Unito m con F, si conduca da m sulla direttrice he l' obliqua $mH = mF$, e si cali da H normalmente ad he la retta HM, protraendola fino all' incontro in M colla curva. Sarà M il punto di contatto, e la retta MT condotta da M per m sarà la tangente. Infatti poichè per costruzione si ha $Hm = mF$, e di più (749) $HM = MF$, dunque MT é normale ad HF (441. 1.°), divide quindi in mezzo l'angolo HMF(449.1.°), e dà TMH=TMF: in conseguenza è tangente (750).

760. Ma come son sempre due le tangenti che da uno stesso punto m scendono sulla curva, é dunque chiaro che sì l' una che l'altra costruzione debbono poter raddoppiarsi. Ed infatti quanto alla seconda, siccome son due le oblique eguali mH che da m posson condursi sulla direttrice (423.10.°), così avremo due differenti angoli FmH, ciascun dei quali diviso in mezzo darà una distinta tangente. E quanto alla prima costruzione è manifesto che prolungata in M′ l'ordinata MR, sarà mM' tangente, 140
per la ragione stessa per cui é tangente mM. Di qui frattanto s'inferirà che *due tangenti, le quali partono dagli estremi di una doppia ordinata, debbono incontrarsi in qualche punto del diametro prolungato*.

761. Abbiansi adesso due diametri IL, AE, per le cui origini A, I passi la secante PA; e da un punto qualunque O di questa, preso sulla parte esteriore alla curva, sia

140 condotta OM′ parallelamente ad IS ordinata sul diametro AE. Avremo 1.° IS : OR :: AS : AR :: $IS^2 : MR^2$ (755) d'onde $MR^2 = OR \times IS = OR \times FR$: cioè le parti OR, MR, FR saranno continuamente proporzionali. 2.° La retta MM′ divisa in mezzo in R e comunque in F darà (574.V.°) $FM' \times FM + FR^2 = MR^2 = OR \times FR = OF \times FR + FR^2$ (574.I.°): onde $FM' \times FM = OF \times FR$. 3.° Quindi se da qualunque altro punto P di PA si conduca PN′ parallela ad OM′ sarà pure $LN' \times LN = PL \times LE$, onde si avrà $FM' \times FM : LN' \times LN :: OF \times FR :: PL \times LE :: OF : PL$ (473) :: IF : IL (523) : perciò *qualunque siasi l'angolo sotto cui un sistema di due o più corde parallele è tagliato da un dato diametro, i rettangoli delle parti in cui respettivamente restan divise le corde, staranno fra loro come le ascisse corrispondenti.* Questo Teorema include quello che è espresso dall'equazioni agli assi ed ai diametri, ed è molto più generale.

762. Sciogliamo adesso alcuni problemi dipendenti dagli esposti principj.

136 I. Dato l'asse AL e il parametro p, trovare un diametro MO che faccia colle sue ordinate un angolo dato $MPn = a$. Il problema si riduce a trovare il punto Q ove l'ordinata normale MQ incontra l'asse. Sia $AQ = x$; il triangolo MQT dà $\tang a = \frac{\sqrt{px}}{2x}$ (676), $x = \frac{p}{4} \cot^2 a$ (637. 5.ª) e $p' (= p + 4x) = \frac{p}{\sen^2 a}$ (638.7.ª).

II. Dato il parametro p' e l'origine M del diametro MO, con l'angolo a delle coordinate, trovar l'asse AL, il vertice della curva A, ed il suo parametro p. Serbando le denominazioni del problema precedente, abbiamo $MQ = \sqrt{px}$, $p' = \frac{p}{\sen^2 a} = p + 4x$, onde $p = p' \sen^2 a$, $x = \frac{p'}{4} \cos^2 a$ (636.1.ª), $MQ = \pm \frac{p'}{2} \sen a \cos a = \pm \frac{p'}{4} \sen 2a$ (643.42.ª).

138 III. Data la parabola VNEnv trovarne l'asse, il parametro e il fuoco. Condotte comunque e divise in mezzo in L, I le due corde parallele Nn, Vv si faccia passare per L, I la retta MB, che sarà un diametro della curva (755). Sopra MB si conduca da n la corda normale on, che sarà parimente normale all'asse

cercato, comecchè parallelo ad MB (755); onde divisa *on* in mezzo con la retta SQ, questa retta sarà l'asse della data 158
parabola (740). Condotta quindi la corda SN, l'ordinata NR, ed NQ normale ad SN, avremo (529.2.°) SR : NR :: NR:RQ, onde RQ sarà il parametro (742). Infine preso SF= $\frac{1}{4}$ RQ, sarà in F il fuoco (746).

Ellisse

763. L'equazione all'ellisse essendo $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax—$ 154
$xx)$ (741), si avrà 1.° $y^2 : 2ax—x^2 :: b^2 : a^2$, cioè $PM^2 : AP \times Pa :: CB^2 : CA^2$; onde *il quadrato dell' ordinata sta al prodotto dell'ascisse, come il quadrato dell' asse minore al quadrato del maggiore*. 2.° Per due nuove coordinate y', x' si avrà $y'^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax' — x'^2)$, ed $y^2 : y'^2 :: x(2a—x) : x'(2a—x')$, cioè *i quadrati di due ordinate stanno come i rettangoli delle ascisse corrispondenti*. 3.° Descritto col centro C e raggio CA un circolo, sarà $PN^2 = AP \times Pa$, ed avremo PN : PM :: $a : b$ :: CB' : CB: onde *l'ordinate dell'ellisse son proporzionali all'ordinate del circolo, e queste stanno a quelle come l'asse trasverso al conjugato*: perciò per descrivere un' ellisse basta far passare una curva per una serie di punti presi sull'ordinate d'un circolo, divise in parti simili.

764. Se nell'equazione si ponga $a—x$=CP in luogo di x=AP, essa diverrà $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2—x^2)$, ove l'ascisse son prese non più dal vertice A, ma dal centro C, e la quale ha il vantaggio di valere tanto per le ascisse positive quanto per le negative, poichè niente cangia permutandovi x in $—x$. Questa, come più semplice, è più in uso; e da questa, se sopra Bb si cali l'ordinata MQ=PC=x, si ha $x^2 = \frac{a^2}{b^2}(b^2—y^2)$,

134 equazione al second'asse, il cui parametro, terzo proporzionale dopo $2b$ e $2a$, sarà $p' = \frac{2a^2}{b} = \frac{2a}{p}\sqrt{2ap}$. E' chiaro che se $a=b$, l'equazione all'ellisse diventa quella del circolo (536); onde il circolo è un'ellisse *equilatera* o di assi eguali.

765. Prese dunque l'ascisse dal centro, e supposto un punto M nella parte superiore o positiva della curva, si avrà il raggio vettore $FM = z = \sqrt{(PM^2 + PF^2)} = (746) \sqrt{(y^2 + (e-x)^2)} = \sqrt{(a^2 - 2ex + \frac{e^2x^2}{a^2})} = a - \frac{ex}{a}$, risultamento che deve prescegliersi in luogo dell'altro $\frac{ex}{a} - a$, a cui pure sembrerebbe che potesse portare l'estrazione della radice, ma che qui non ha luogo, perché essendo e ed x ambedue minori di a, si ha $ex < a^2$, e in conseguenza $\frac{ex}{a} < a$, onde $\frac{ex}{a} - a$ darebbe per FM un valor negativo, contro l'ipotesi. Nel modo stesso si avrà $fM = z' = \sqrt{(PM^2 + Pf^2)} = \sqrt{(y^2 + (e+x)^2)} = \sqrt{(y^2 + 2ex + \frac{e^2x^2}{a^2})} = a + \frac{ex}{a}$. Dunque $fM + FM = 2a$, cioè *la somma dei due raggi vettori, o della distanza di un punto qualunque dell' ellisse ai due fuochi, eguaglia l' asse trasverso*.

766. Se sia l'angolo $PfM = \beta$, sarà $fP (= e + x) = fM.\cos\beta$, e perciò $x = fM.\cos\beta - e$, ed $fM (= a + \frac{ex}{a}) = \frac{a^2 - e^2}{a - e\cos\beta} = \frac{\frac{1}{2}ap}{a - e\cos\beta}$; come pure $FM = \frac{a^2 - e^2}{a - e\cos\beta'} = \frac{\frac{1}{2}ap}{a - e\cos\beta'}$, posto $PFM = \beta'$.

767. Debbasi ora condurre ad un dato punto M della curva una tangente. Prolungato in L il raggio vettore fM in modo che sia ML$=$FM, unisco FL, e conduco da M sopra FL la perpendicolare MT, che dividerà in mezzo FL e l'angolo FML (449.1.°). Quindi preso sopra MT un punto qualunque m diverso da M, conduco le rette fm, Fm, mL. Sarà mF$=$ mL (439), e perciò mF$+mf=m$L$+mf$: ma mL$+$ $mf>f$L(422) e per costruzione fL$=f$M$+$ML$=f$M$+$ FM$=2a$ (765); dunque mL$+mf>2a$, onde il punto qualunque m non caderà sulla curva, la quale non avrà comune con MT che il punto M. Dunque MT sarà tangente; perciò *la retta* MT, *che divide in mezzo l'angolo fatto esteriormente all' ellisse dall'un raggio vettore col prolungamento dell'altro, é tangente.*

768. Poichè FML è diviso in mezzo da MT, avremo FMT$=$TML$=f$MQ(431.1.°). Dunque se da M si alzi sulla tangente la normale MN, sarà fMN $=$ NMF (429.2.°) e quindi 1.° *tutti i raggi luminosi, sonori e calorifici che partono da uno dei fuochi percuotendo la curva, si rifletton sull'altro.* 2.° Il triangolo fMF darà (528) fM : FM : : fN : NF, ovvero fM$+$FM($2a$): FM$(a-\frac{ex}{a})$ :: fN$+$FN ($2e$) : FN$=e-\frac{e^2x}{a^2}=e-x+\frac{b^2x}{a^2}$ ed fN$=2e-$FN$=e+\frac{e^2x}{a^2}=e+x-\frac{b^2x}{a^2}$; dunque poichè fP$=x+e$ ed FP$=x-e$, si avrà 1.° la *sunnormale* PN$=$FN$+$FP$=\frac{b^2x}{a^2}=\frac{px}{2a}$: 2.° la *normale* MN$=n=\frac{1}{a^2}\sqrt{(a^4y^2+b^4x^2)}=\frac{b}{a^2}\sqrt{(a^4-e^2x^2)}=\frac{b}{a}\sqrt{(2az-z^2)}$ (765): 3.° la *suttangente* PT$=\frac{PM^2}{PN}=$

141 $\frac{a^2-x^2}{x}=\frac{a^2y^2}{b^2x}$: 4.° la *tangente* TM$=\frac{y}{b^2x}\sqrt{(a^4y^2+b^4x^2)}=\frac{1}{ax}\sqrt{(a^2-x^2)(a^4-e^2x^2)}$. Inoltre TC$=TP+PC=\frac{a^2}{x}$, d'onde si ha un altro modo di determinare il punto T della tangente in M; T$f=\frac{a^2}{x}+e=\frac{a^2+ex}{x}=\frac{a(2a-z)}{x}$ (765); TN$=$TP$+$PN$=\frac{a^2n^2}{b^2x}$; TF$=\frac{a^2}{x}-e=\frac{az}{x}$; AT$=\frac{a^2}{x}-a$; e nel vertice A la tangente AV$=\frac{\text{PM . AT}}{\text{PT}}=\frac{ay}{a+x}=b\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$.

769. Se debba condursi la tangente da un punto m dato fuori della curva, si unisca m con F, e quindi si facciano intersecare in L due archi l' uno descritto col centro in m e raggio mL$=m$F, l' altro col centro in f e raggio fL$=2a$. In seguito si conduca fL; il punto M ove fL taglia la curva sarà il punto di contatto, e la retta mT fatta passare per M sarà la tangente cercata. Infatti poichè mL$=m$F ed ML$=f$L$-f$M$=2a-f$M$=$FM (765), MT è dunque normale sulla metà di FL (441.1.°), divide in mezzo l'angolo FML (449), ed è per conseguenza tangente 767). E' poi manifesto che come l' intersecazione dei raggi mL, fL può aver luogo in due punti, l'uno al di sopra, l' altro al di sotto di m, così la costruzione potrà raddoppiarsi, e darà due tangenti condotte dallo stesso punto m alla curva.

770. Che se dai fuochi f, F e dal punto N ove la normale incontra l'asse, si conducano sulla tangente e sui raggi vettori le perpendicolari fQ ed FR, NB ed NB', come pure per il centro C la DCD' parallela alla tangente, sarà 1.° TN ($\frac{a^2n^2}{b^2x}$) : NM(n) : : TF ($\frac{az}{x}$) : FR$=q=\frac{b^2z}{an}$: : Tf ($\frac{2a^2-az}{x}$) : fQ $=$

$\frac{b^2(2a-z)}{an} = \frac{an}{z}$ (768) ; d' onde si ha $FR \times fQ = b^2$, e la nuova 141
espression della normale $n = \frac{b^2 z}{aq} = \frac{pz}{2q}$ eguale a quella già trovata per la parabola (752), 2.° $Mf\,(a + \frac{ex}{a}) : fP\,(e+x) : : fN\,(e + \frac{e^2 x}{a^2}) : fB' = \frac{e(e+x)}{a}$, onde $fM - fB' = MB' = \frac{a^2 - e^2}{a} = \frac{b^2}{a} = \frac{p}{2} = MB$, atteso l'angolo $fMN = NMF$: 3.° Tf. $(\frac{a^2}{x} + e) : fM\,(a + \frac{ex}{a}) : : Cf\,(e) : fD = \frac{ex}{a}$, e però $DM = Mf - fD = a = D'M$, attesi i triangoli TFM, CFD'. 4.° Infine condotta da C la normale CO sulla tangente QT, si avrà CO : NM(n) :: CT $(\frac{a^2}{x})$: TN $(\frac{a^2 n^2}{b^2 x})$, d' onde $CO \times NM = b^2$.

771. Se dal punto M si conducano all'asse conjugato la tangente Mt e la normale MO prolungata in n, i triangoli simili 134
MPO, MQn, MQt e la sunnormale PO $(= \frac{b^2 x}{a^2})$ daranno per il second' asse, sostituendo il valor di x^2 (764), 1.° la *sunnormale* $Qn = \frac{PM.MQ}{PO} = \frac{a^2 y}{b^2} = \frac{p' y}{2b}$ (745) ; 2.° la *normale* $Mn = \frac{OM.MQ}{PO} = \frac{a}{b^2}\sqrt{(b^4 + c^2 y^2)}$; 3.° la *suttangente* $Qt = \frac{QM^2}{nQ} = \frac{b^2 - y^2}{y}$; onde $Ct = CQ + Qt = \frac{b^2}{y}$ e perciò CQ : CB : : CB : Ct, come nell' asse trasverso .

772. Una retta nCN che passando per il centro C termina ai due punti opposti della curva , dicesi *diametro*; e condotta 142
DCd parallela alla tangente in N , i diametri DCd , nCN chiamansi *conjugati* ; le rette MP parallele alla tangente son l'ordinate del diametro CN , le parti CP ne son l' ascisse : il parametro di un diametro qualunque è una terza-proporzionale a questo e al suo conjugato .

773. Condotte dall'estremità D, N l'ordinate DI, NQ all'asse maggiore Aa, sia QN$=y$, CQ$=x$, ID$=u$, IC$=z=\frac{a}{b}\sqrt{(b^2-u^2)}$ (764); i triangoli simili DIC, NQT danno NQ^2 : QT^2 :: DI^2 : IC^2, ovvero $\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2) : \frac{(a^2-x^2)^2}{x^2} :: u^2 : a^2-\frac{a^2u^2}{b^2}$ onde $u=\frac{bx}{a}$; così si troverebbe $y=\frac{bz}{a}$, onde $\frac{u}{x}=\frac{y}{z}$ e $zu=xy$, cioè i triangoli DIC, CNQ sono eguali in superficie. Dunque 1.° $u^2=\frac{b^2x^2}{a^2}=b^2-y^2$ (764) ed $u^2+y^2=b^2$; 2.° $z^2=\frac{a^2y^2}{b^2}=a^2-x^2$ e $z^2+x^2=a^2$; 3.° $u^2+z^2+y^2+x^2$ (=DC^2+CN^2)$=a^2+b^2$: cioè *nell'ellisse la somma dei quadrati di due diametri conjugati è sempre eguale alla somma dei quadrati de' due assi*; 4.° condotta ND, sarà la superficie del triangolo NCD $=\frac{(u+y)(z+x)}{2}-\frac{zu}{2}-\frac{xy}{2}=\frac{ux+yz}{2}=\frac{bx^2}{2a}+\frac{ay^2}{2b}=\frac{ab}{2}$; dunque il parallelogrammo CDEN$=ab$, e poichè, come vedremo (775.2.°), CD$=$Cd, e CN$=$Cn, dunque l'intero parallelogrammo FEHG$=4ab=2a\times 2b$, e però *tutti i parallelogrammi circoscritti all' ellisse sono eguali tra loro e al rettangolo de' due assi*.

774. Sia ora il semidiametro CN$=m$, CD$=n$, l'angolo CPM$=$DC$n=p$, sarà 1.° $m^2+n^2=a^2+b^2$; 2.° $ab=mn\,\mathrm{sen}p$ che è l'espressione della superficie del parallelogrammo CDNE (570). Ora queste due equazioni danno subito i diametri conjugati ed eguali dell' ellisse, poichè allora $2m^2=a^2+b^2$, ovvero $m=\pm\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$, e $\mathrm{sen}p=\frac{2ab}{a^2+b^2}$; onde poichè queste quantità son sempre reali, ogni ellisse ha due diametri conjugati eguali. La lor posizione dipende dal valor di x, ma $x^2+y^2=b^2+\frac{a^2-b^2}{a^2}x^2$ (764)$=m^2=\frac{a^2+b^2}{2}$; dunque $x=\frac{a}{\sqrt{2}}$, valore indipendente da b, onde l'ordinata NQ prolungata, determinerà i diametri conjugati eguali in tutte le ellissi, che avranno comune l' asse Aa.

775. Cerchiamo ora l' equazione alle coordinate CP, PM, e 142
sia $CP=x$, $PM=y$, $CQ=t$, $QN=r$, $NT=q$, e $TQ=\frac{a^2-t^2}{t}$ .. (768) $=s$. Condotte PK, MO perpendicolari all'asse, e PL perpendicolare ad MO, i triangoli simili NQT, MLP danno $ML=\frac{ry}{q}$, $PL=\frac{sy}{q}$, e gli altri due CPK, CNQ danno $PK=\frac{rx}{m}$, $CK=\frac{tx}{m}$, onde $CO=\frac{tx}{m}-\frac{sy}{q}$ ed $MO=\frac{ry}{q}+\frac{rx}{m}$: ma per la proprietà dell' ellisse, $\frac{a^2}{b^2}$. $MO^2=a^2-CO^2$; dunque sostituendo, e riflettendo che $\frac{a^2r^2}{b^2}=a^2-t^2$ (764) $=ts$, si avrà $(s+t)\times(\frac{tx^2}{m^2}+\frac{sy^2}{q^2})=a^2$: ma $s+t=\frac{a^2}{t}$ (768), onde $(s+t)\frac{t}{m^2}=\frac{a^2}{m^2}$, ed $(s+t)\frac{s}{q^2}=\frac{a^2s}{q^2t}=\frac{a^2}{n^2}$, perchè DIC=CQN (773) dà CQN : NQT : : $t : s$ (575) : : DIC : NQT : : $n^2 : q^2$ (578); dunque $\frac{a^2y^2}{n^2}+\frac{a^2x^2}{m^2}=a^2$, ovvero $y^2=\frac{n^2}{m^2}(m^2-x^2)$, equazione simile a quella degli assi. Dal che segue 1.° che i quadrati y^2, y'^2 di due ordinate y, y' stanno come i rettangoli $(m+x)(m-x)$, $(m+x')(m-x')$, ossia m^2-x^2, $m^2-x'^2$ delle ascisse corrispondenti; 2.° che ogni diametro NC*n* divide in mezzo l' ordinate MP*m*, e perciò l'ellisse intera: 3.° che ogni diametro N*n* è diviso in mezzo nel centro C, perchè ne' punti N, *n* si ha $y=o$, ed $x^2=m^2$, onde $x=\pm m$.

776. La perfetta analogia fra l' equazioni agli assi e ai dia- 143
metri dà luogo per questi a molte proprietà, che abbiamo già veduto spettare a quelli. Sia TR una secante qualunque, che tagli la curva nei punti Q, R, e incontri in T il diametro prolungato *d*D. Condotte su questo le ordinate QS, RH, e chiamato m il semidiametro CD, x', $\pm x''$ le ascisse CS, CH (preso per la seconda il segno inferiore quando C cada fra S ed H) e fatta $CT=r$, i triangoli simili TQS, TRH daranno TS^2 $(r-x')^2$: TH^2 $(r\mp x'')^2$: : $SQ^2 : RH^2$: : $m^2-x'^2$: $m^2-x''^2$ (775); d'onde operando al solito e riducendo, si avrà

143 $(r^2+m^2)(x'\pm x'')\mp 2rx'x''=2rm^2$. Si supponga adesso che la secante TR si converta nella tangente TM, nel qual caso le due ascisse CH,CS si riuniscono nell'unica CP; fatta $CP=x$ l' equazione darà $(r^2+m^2)x-rx^2=rm^2$, dalla quale risoluta si ha $r=\frac{x^2+m^2}{2x}\pm\frac{x^2-m^2}{2x}$; onde escluso il segno superiore da cui si avrebbe $r=\frac{2x}{2}$ assurdo, avremo dall' inferiore $r=CT=\frac{m^2}{x}$, cioè CT terza proporzionale dopo l' ascissa x e il semidiametro m. Si ha pure la suttangente $PT=CT-x=\frac{m^2-x^2}{x}$, e la tangente al vertice $DN=\frac{DT\times PM}{PT}=n\sqrt{\frac{m-x}{m+x}}$ il tutto precisamente come per l' asse (768).

777. L' equazione $CT=\frac{m^2}{x}$ dà una seconda maniera di condurre dal punto esterno e qualunque T, le due tangenti alla curva; a ciò bastando far discender da T un diametro Dd, e prender l' ascissa $CP=x$ terza proporzionale dopo CT e CD; quindi condotta per P la doppia ordinata MM', saranno TM, TM' le due tangenti, avendo in tal caso si l' una che l' altra la suttangente che lor si compete. Da questa costruzione intanto s' inferirà, come nella parabola (760), che *due tangenti, le quali partono dall' estremità di una corda: vanno a riunirsi nel diametro che la divide per mezzo*, o al quale è ordinata la corda. Perciò se partono dall' estremità di un diametro s' incontrano nel prolungamento del suo conjugato. Ma passiamo ad un altro più importante teorema.

778. Sia la corda MO tagliata comunque nelle due parti
144 MH, HO dal diametro qualunque FE. Condotto sulla metà N della corda il diametro AB, e parallelamente alla stessa il di lui conjugato KL (772), e condotte di più le MR, EG, HI parallele fra loro e ad AB, si faccia $EC=r$, $KC=s$, $HC=x$, $CR=z=MN=ON$, $CI=u=HN$, $GC=\omega$. I triangoli CGE, CIH daranno $GC^2(\omega^2):CI^2(u^2)::EG^2:HI^2(=MR^2)::s^2-\omega^2:s^2-z^2$ (775.1.°). Di qui $s^2:s^2-z^2+u^2::\omega^2:u^2$. E poichè gli stessi triangoli danno $GC(\omega):CI(u)::EC(r):CH(x)$, dunque $s^2:s^2-z^2+u^2::r^2:x^2$, ed $s^2:z^2-u^2::r^2:r^2-x^2$. Quindi

$z^2-u^2=(z+u)(z-u)=(ON+HN)\,(ON-HN)=HO\times HM=$ 144
$\frac{s^2}{r^2}\,(r^2-x^2)$. Quest'equazione è analoga a quelle avute per le coordinate agli assi e ai diametri, e fa vedere che *comunque e sotto qualunque angolo si taglino un diametro ed una corda, il rettangolo delle ascisse del diametro sta a quello delle due porzioni di corda, come il quadrato dello stesso diametro al quadrato del diametro parallelo alla corda*; teorema che include ambedue quelli contenuti nelle predette equazioni agli assi e ai diametri, e che può riguardarsi come più generale. Una simile osservazione ebbe luogo anche rapporto all' equazione della parabola (761).

779. Terminiamo con applicar gli esposti principj alla soluzione dei seguenti problemi.

I. Dati i due semiassi a,b trovar due diametri conjugati 142
che facciano fra loro un angolo dato $p=DCn$. Abbiamo $m^2+n^2=a^2+b^2$, ed $mn=\frac{ab}{sen\,p}$ (774); dunque $m^2+n^2\pm 2mn=a^2+b^2\pm\frac{2ab}{sen\,p}$; ed $m\pm n=\sqrt{(a^2+b^2\pm\frac{2ab}{sen\,p})}$ d'onde sommando e sottraendo si ha m ed n. Per determinar la direzione di un de' diametri o l'angolo ACN che chiamo c, il triangolo CNT dà (471, 663) $sen(p-c):m::sen\,p:CT=\frac{aa}{CQ}(768)=\frac{m\,sen\,p}{sen\,(p-c)}$, onde $CQ=\frac{a^2 sen(p-c)}{m\,sen\,p}$; si ha dunque nel triangolo rettangolo CNQ (675) $m\cos c=\frac{a^2 sen\,(p-c)}{m\,sen\,p}$, che dà $m^2\,sen\,p\,\cos c=a^2 sen\,(p-c)=$ (640) $a^2 sen\,p\cos c-a^2\,sen\,c\cos p$, ovvero $\frac{a^2-m^2}{a^2}\,sen\,p\cos c=sen\,c\cos p$; e perciò (637. 4.ª) $tang\,c=\frac{a^2-m^2}{a^2}\,tang\,p$.

II. Dati i semidiametri conjugati m, n e l'angolo p che fanno tra loro, trovare i due assi e la lor direzione. Dall'equazioni $mn\,sen\,p=ab$ ed $a^2+b^2=m^2+n^2$ con un calcolo simile al

precedente si determina a e b. L'angolo che dà la direzione degli assi si trova come prima.

145 III. Data un' ellisse trovarne il centro, gli assi ed i fuochi. Condotte comunque e divise in mezzo le due corde parallele CD, EF, si faccia passare per i punti di divisione G, H la corda AB. Sarà AB un diametro (773.2.°) sulla cui metà avremo il centro cercato. Con questo centro e con OB per raggio si descriva il circolo KALB, e si uniscano i quattro punti d'intersezione delle due curve. Le normali PQ, MN condotte per O sopra due delle corde adjacenti KB, KA protratte dall' una e dall' altra parte fino al perimetro dell' ellisse saranno gli assi. Infatti si tagliano normalmente nel centro, e sono respettivamente perpendicolari sulla metà delle parallele KB ed AL, KA e BL proprietà esclusive degli assi. Trovati questi, i fuochi si avranno nella maniera già data (746).

Iperbola

135 780. Dall' equazione all' iperbola $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax + x^2)$ (745) si ha 1.° $y^2 : x(2a + x) :: b^2 : a^2$, cioè $PM^2 : AP \times Pa :: CB^2 : CA^2$, *onde il quadrato dell' ordinata è al rettangolo dell' ascisse* (prese l' una da P al vertice A, l'altra da P al vertice a) *come il quadrato del second'asse al quadrato del primo*. 2.° Per due nuove coordinate y', x' avremo $y'^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax' + x'^2)$, $y^2 : y'^2 :: x(2a + x) : x'(2a + x')$, cioè *i quadrati delle ordinate stanno come i rettangoli delle ascisse corrispondenti*; due proprietà che rilevammo ancora nell' ellisse (765), con la qual curva vedremo averne l' iperbola comuni molte altre, come è chiaro dover succedere in forza della somma somiglianza tra le due equazioni. Se si ponga $x - a$ in luogo di $x = AP$, l'equazione diventa $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2)$, ove $x = CP$, e

l'ascisse son prese dal centro: e poichè questa non 135
cangia permutandovi x in $-x$, perciò appartiene insieme alle due iperbole opposte (743); quindi quanto saremo per dire dipendentemente da quest' equazione, s'intenderà detto tanto dell' un'iperbola che dell'altra. Intanto da $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2)$ abbiamo $x^2 = \frac{a^2}{b^2}(b^2 + y^2)$, equazione al second'asse, le cui ascisse e ordinate sono ordinate ed ascisse all'asse primo, e tutte esteriori alla curva. In queste equazioni fatto $a = b$, viene $y^2 = 2ax + x^2$, $y^2 = x^2 - a^2$, $x^2 = a^2 + y^2$, e allora l'iperbola è *equilatera*.

781. Prese dunque l'ascisse dal centro, e supposto M un punto nel ramo superiore o positivo della sezione destra o positiva, si avrà il raggio vettore $FM = z = \sqrt{(PM^2 + PF^2)} = \sqrt{(y^2 + (x-e)^2)} = \sqrt{\left(\frac{e^2x^2}{a^2} - 2ex + a^2\right)} = \frac{ex}{a} - a$, non dovendosi qui attendere all' altra radice $a - \frac{ex}{a}$, che contro l'ipotesi darebbe FM negativo, atteso che abbiamo non solo x, ma ancora e maggiore di a (746); e perciò $ex > a^2$, $\frac{ex}{a} > a$, e quindi $a - \frac{ex}{a}$ quantità negativa. Nel modo stesso si troverà $fM = z' = \frac{ex}{a} + a$. Onde $fM - MF = 2a$, cioè *la differenza de' due raggi vettori eguaglierà l' asse trasverso*.

782. Se sia l' angolo $AFM = \beta$, verrà, come nell' ellisse (766), $FM = \frac{e^2 - a^2}{a + e\cos\beta} = \frac{\frac{1}{2}ap}{a + e\cos\beta}$.

783. Per condur la tangente MT a un punto M 145

146 dell'iperbola, si proverà, presso a poco come nell'ellisse, che diviso in mezzo con MT l'angolo fMF formato dai raggi vettori, sarà MT la tangente cercata. Infatti presa sopra fM una porzione $MD=MF$, e da un punto qualunque m di MT condotte mf, mF, mD, avremo $mf<fD+Dm$ (422), ossia $mf<2a+mF$. giacchè $fD=fM-MF=2a$(781) e $Dm=mF$ (449.2.°). Dunque altresì $mf-mF<2a$; onde non essendo questa differenza eguale a $2a$, il punto qualunque m di MT non caderà sulla curva, che perciò sarà toccata soltanto in M da MT: onde MT è tangente.

784. Se la tangente debba condursi da un punto m dato fuori della curva, sarà facile dimostrare, come nell' ellisse (769), che fatti intersecare in D due archi descritti l'uno col centro in m e raggio $mD=Fm$, l'altro col centro in f e raggio $fD=2a$, e prolungata fD fino all'incontro in M colla curva, sarà M il punto di contatto e la retta TmM la tangente. E qui pure si osserverà, come nell'ellisse (769), che la costruzione prescritta porta a trovar due punti di contatto, e perciò dà le due tangenti che da m posson condursi alla curva. Ed é poi inutile avvertire come in egual modo potremo condur le due tangenti anche sull' iperbola opposta.

785. Il triangolo fMF dà (528) $fM:MF::fT:TF$, ovvero $fM+FM\left(=\frac{2ex}{a}\right):fM\left(=\frac{ex+a^2}{a}\right)::fT+FT(2e):fT=\frac{a^2+ex}{x}=\frac{a^2}{x}+e$. Dunque $fT-e=CT=\frac{aa}{x}$, d'onde pur si trova un altro modo di determinare il punto T della tangente in M; e di più si conclude, che essendo CT positiva finchè lo è x, *tutte le tangenti a quella delle due opposte sezioni ove le x son positive taglian l'asse fra il vertice della medesima e il centro*; come per la contraria ragione quelle dell'altra sezione lo tagliano nella parte

rimanente. Perciò *niuna retta tangente ad un punto qualunque di un ramo può esserlo a verun punto degli altri*. 146

786. Quindi se MN sia la normale, si avrà la *suttangente* $PT = CP - CT = x - \frac{a^2}{x} = \frac{x^2 - a^2}{x}$; la *tangente* $MT = \sqrt{(TP^2 + PM^2)} = \frac{1}{ax}\sqrt{(x^2 - a^2)(e^2x^2 - a^4)}$; la *sunnormale* $PN = \frac{PM^2}{PT} = \frac{b^2x}{a^2}$; la *normale* $n = \sqrt{(PM^2 + PN^2)} = \frac{b}{a^2}\sqrt{(e^2x^2 - a^4)} = \frac{b}{a}\sqrt{(z^2 + 2az)}$: $TN = PN + PT = \frac{e^2x^2 - a^4}{a^2x} = \frac{z(2a + z)}{x} = \frac{a^2n^2}{b^2x}$; $AT = \frac{ax - a^2}{x}$; $aT = \frac{ax + a^2}{x}$.

787. Se, come nell' ellisse (759), si conducano le perpendicolari NB, NB′ ai raggi vettori, ed FS, *fs* alla tangente, a cui sia parallela CD, condotta dal centro C, si troverà $FM(\frac{ex}{a} - a) : FP(x - e) :: FN(x - e + \frac{b^2x}{a^2}) : FB = \frac{ex - e^2}{a}$. Dunque $MB = FM - FB = \frac{ex}{a} - a - \frac{ex - e^2}{a} = \frac{e^2 - a^2}{a} = \frac{b^2}{a} = \frac{1}{2}p$ (745). E perchè l'angolo $QMB' = fMT = TMF$ rende eguali gli angoli B′MN, BMN ed eguali e simili i triangoli NMB′, NMB, sarà dunque $MB' = MB = \frac{1}{2}p$. 2.° I triangoli TFS, T*fs* simili ad MPT danno TM : MP :: FT : FS, TM : MP :: *f*T : F*s*, e perciò $TM^2 \ldots \left(\frac{1}{a^2x^2}(x^2 - a^2)(e^2x^2 - a^4)\right) : PM^2 \left(\frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2)\right) :: FT \times Tf\left(\frac{e^2x^2 - a^4}{a^2}\right) : FS \times fs = b^2$. 3.° I triangoli rettangoli SFM, MB′N simili per esser l'angolo SMF = QMB′ = MNB′ (429.2.°), danno immediatamente FS (*q*) : : FM (*z*) : : MB′ ($\frac{p}{2}$): $MN = n = \frac{pz}{2q}$, come nell'ellisse e nella parabola (753.770), e di qui $q = \frac{b^2z}{an}$. 4.° Le parallele TM, CD danno *f*T : CT :: FM : DM,

145 cioè $\frac{ex+a^2}{x} : \frac{a^2}{x} :: \frac{ex+a^2}{a}$: DM$=a$. Infine 5.° condotta da C la normale CO sulla tangente QT, si avrà CO : NM (n) :: CT ($\frac{a^2}{x}$) : TN ($\frac{a^2n^2}{b^2x}$), d'onde CO$\times$NM$=b^2$.

146 788. Sia adesso alzata sul vertice A la normale D*d* divisa in mezzo in A, ed eguale all'asse conjugato $2b$. Se dal centro C si conducano per i punti D, *d* le rette indefinite CR, C*r* e da un punto qualunque N di CR si conduca N*n* parallela a D*d*, avremo (525) CA : DA :: CP : NP ovvero $a : b :: x :$ NP$=\frac{bx}{a}$. Dunque 1.° NM$=$NP$-$PM$=\frac{bx}{a}-y$, ed M*n*$=$MP$+$P*n*$=\frac{bx}{a}+y$; onde NM$\times$M*n*$=\frac{b^2x^2}{a^2}-y^2=$ (780) $b^2=$DA^2. 2.° Poichè NP$=\frac{bx}{a}$, ed MP$=y=\frac{b}{a}\sqrt{(x^2-a^2)}=$ (384) $\frac{b}{a}\left(x-\frac{a^2}{2x}-\frac{a^4}{8x^3}-\frac{a^6}{16x^5}-\text{ec.}\right)=\frac{bx}{a}-\frac{ba}{2x}\left(a+\frac{a^3}{4x^2}+\frac{a^5}{8x^4}+\text{ec.}\right)$, sarà sempre MN$>$MP, cioè la curva non incontrerà mai le rette indefinite CR, C*r*; peraltro sempre più vi si avvicinerà, mentre crescendo l'ascissa x, scema sempre la differenza $\frac{b}{2x}\left(a+\frac{a^3}{4x^2}+\text{ec.}\right)$ fra NP ed MP. Questa singolarità rimarchevole ha fatto dare il nome di *asintoti* alle rette CR, C*r*, come quelle verso cui la curva continuamente si avanza, senza raggiungerle, nè toccarle giammai. L'iperbola riferita agli asintoti ha molte proprietà, ed eccone alcune fra le principali.

789. Condotto MQ, AL parallele all'asintoto C*d*, i triangoli DLA, CLA sono isosceli (507); onde fatta AL$=$

DL=CL=m, CQ=x, QM=y; e condotta MK parallela e perciò eguale a CQ, i triangoli simili DLA, NQM, MKn danno MN : DA :: QM : LA, ed Mn : DA :: MK : DL, e però NM×Mn : DA^2 :: QM×MK : LA×DL= AL^2; ma NM×Mn=DA^2 (788); dunque $xy=m^2$, *equazione all'iperbola tra gli asintoti*, in cui $m^2 = \frac{a^2+b^2}{4}$ si chiama la *potenza dell'iperbola*. 147

790. Se due parallele Ff, Gg, terminate agli asintoti taglino un' iperbola nei punti m, h, p, K e sieno MmN, PpQ perpendicolari all' asse, si avrà Fm : Mm : : Gp : Pp, ed mf : mN : : pg : pQ, e però Fm×mf : Mm×mN : : Gp×pg : Pp×pQ; ma (788) Pp×pQ=b^2=Mm×mN; dunque Fm×mf=Gp×pg; dunque anche gK×KG=fh×hF. 148

791. Se i punti p, K coincidano in un sol punto D, la retta TDt sarà tangente in D, e si avrà Fm×mf=TD×Dt=fh×hF, onde fh (hm+mF)=Fm (mh+hf), e però fh=Fm e TD= Dt; ma condotta DE parallela a Ct, i triangoli simili TDE, TtC danno TE=EC; dunque la tangente a un punto D dell'iperbola si ha pure conducendo DE parallela all'asintoto, prendendo ET=EC, e per T, D conducendo la retta TDt.

792. Dall' esser sempre fh=Fm si ha la maniera di descrivere un' iperbola tra due dati asintoti CT, Ct, che passi per un dato punto m, poichè condotte per m le rette Ff, MN, si farà fh=Fm, nN=Mm e i punti m, n, h saranno nell' iperbola.

793. Del resto gli asintoti ad una sezione prolungati al di là del centro divengono asintoti dell' opposta. Infatti alzata 147
sul vertice a la normale D'd', i triangoli eguali e simili DCd, D'Cd' danno D'd'=Dd=2b, cioè i nuovi prolungamenti sono situati rapporto alla seconda iperbola come gli asintoti rapporto alla prima (788); onde debbon godere delle medesime proprietà.

794. Poiché tutte le tangenti all'iperbola mAm' taglian l'asse fra A,C (783), e tagliandolo in C divengono asintoti, ogni 149
altra retta QCQ' contenuta fra l' angolo TCt degli asintoti e che passi per C sarà secante, e taglierà in due punti opposti M, M' le due sezioni. Or la parte MM' di questa secante

149 compresa fra le due curve si chiama *diametro trasverso* o *primo*, il cui *conjugato* o *secondo* è la DCd parallela ed eguale alla Tt tangente in M, e divisa in mezzo in C, come Tt lo è in M (791); l'ordinate sono mQm' parallele al conjugato DCd, e il parametro è una terza-proporzionale al diametro e al suo conjugato.

795. Passiamo a trovar l'equazione fra le coordinate ai diametri. Poiché NQ : Qn : : TM : Mt ed Nm = $m'n$; se dunque CM= m, CD=MT=n, CQ=x, Qm=y, sarà $m : n :: x :$ NQ= $\frac{nx}{m}$ = nQ; onde Nm= $\frac{nx}{m} - y$ ed mn= $\frac{nx}{m} + y$: ma TM^2= N$m \times mn$ (790); dunque $n^2 = \frac{n^2x^2}{m^2} - y^2$, ed $y^2 = \frac{n^2}{m^2}(x^2 - m^2)$, equazione simile a quella delle coordinate all' asse trasverso, che dà $x^2 = \frac{m^2}{n^2}(y^2 + n^2)$, equazione al diametro conjugato; e da queste si apprende 1.° che i quadrati y^2, y'^2 di due ordinate al diametro trasverso $2m$ stanno come i rettangoli $x^2 - m^2$, $x'^2 - m^2$ della loro ascisse corrispondenti; 2.° che ogni diametro divide in mezzo tutte le sue coordinate, ed è diviso in mezzo nel centro C, ove y=o dà $x^2 = m^2$, e quindi $x = \pm m$. Perciò il diametro di una sezione è diametro anche dell' opposta, e in questa come nell' altra, le ordinate son parallele alla T$'t'$ tangente in M', la quale perciò sarà parallela ed eguale al diametro conjugato Dd, e all' altra tangente Tt. E con un raziocinio e calcolo analogo a quello già adoprato nell'ellisse (776), si potrà pur dimostrare, che come rapporto all' asse così pure rapporto a qualunque diametro, condotta sul prolungamento di questo da qualsivoglia punto della curva una tangente, la parte del diametro intercetta fra il centro e la tangente è terza proporzionale dopo l' ascissa corrispondente al punto di contatto e il semidiametro; che chiamata x quest' asciss si ha per valore della suttangente $\frac{x^2 - m^2}{x}$; che le due tangenti condotte all'estremità di una corda s'incontrano nel diametro che la divide in mezzo ec. Può infine anche osservarsi che ogni diametro conjugato di un iperbola, è diametro trasverso di un altra totalmente separata dalla prima.

796. Sia ora aCA il primo asse dell' iperbola, e rappresenti BA la metà del secondo; condotte DE, TG, MPK perpendico- 149 lari a CA, ed ML e tK parallele alla stessa CA, i triangoli MTL, MtK, CDE saranno eguali e simili; fatta dunque $CP = v$, $PM = z$, $CE = tK = ML = r$, $MK = DE = TL = s$, e $CM = m$, $MT = n$, $CA = a$, $AB = b$, si avrà, $TG\,(z+s) : CG\,(u+r) :: b : a$ e perciò $az + as = bu + br$: inoltre $TL\,(s) : LM\,(r) :: MP\,(z) : PS = \frac{rz}{s} = \frac{u^2 - a^2}{u}$ (786) $= \frac{a^2 z^2}{b^2 u}$ (780), onde $r = \frac{a^2 sz}{b^2 u}$; e sostituendo questo valore nell' equazione $az + as = bu + br$, si ha $(bu - as)(bu - az) = 0$, ma $bu - az = 0$ dà $a : b :: u : z$ contro l' equazione della curva (780), dunque (188) $bu - as = 0$, $bu = as$, onde $az = br$, e quindi $a : b :: u : s :: r : z$, cioè CP : DE : : CE : MP.

797. Dunque 1.° i triangoli CED, CMP sono eguali in superficie (575.IV.°); 2.° condotta DM, sarà $DMC = \frac{1}{2}$ CDTM = al trapezio $DMPE = \frac{1}{2}(s+z)(u-r)$ (571) $= \frac{1}{2}(su + uz - sr - rz)$, cioè (poichè $u : s :: r : z$, onde $uz - sr = 0$) $= \frac{1}{2}(su - rz)$; ed essendosi trovato $bu = as$, ed $az = br$, sarà $s = \frac{bu}{a}$, $r = \frac{az}{b}$, e perciò $su = \frac{bu^2}{a}$, $rz = \frac{az^2}{b}$, onde $\frac{1}{2}$ CDTM $= \frac{b^2u^2 - a^2z^2}{2ab}$: ma l' equazion dell' iperbola dà $z^2 = \frac{b^2}{a^2}(u^2 - a^2)$ e però $b^2u^2 - a^2z^2 = a^2b^2$; dunque $\frac{1}{2}$ CDTM $= \frac{a^2b^2}{2ab} = \frac{ab}{2}$; dunque *il parallelogrammo* TT' *formato dai diametri conjugati è eguale al rettangolo degli assi*: 3.° $DE^2 = s^2 = \frac{b^2u^2}{a^2} = b^2 + z^2 = b^2 + PM^2$ (per l'equazione all'iperbola); dunque $DE^2 - PM^2 = b^2$: 4.° $CE^2 = r^2 = \frac{a^2z^2}{b^2} = u^2 - a^2 = CP^2 - a^2$; dunque $CP^2 - CE^2 = a^2$; 5.° $a^2 - b^2 = CP^2 + PM^2 - DE^2 - CE^2 = CM^2 - CD^2 = m^2 - n^2$, e però *la differenza dei quadrati di due diametri conjugati è eguale alla differenza de' quadrati dei due assi*: onde nell' iperbola equilatera, qualunque diametro eguaglia il suo conjugato.

798. Sia infine come nell'ellisse (778) e nella parabola (761)
150 la corda qualunque MO incontrata o tagliata comunque in H dal prolungamento di qualsivoglia diametro FE. Condotto sulla metà N della corda il diametro AB, e parallelamente alla medesima l'ordinata EG e il diametro conjugato KL, si faccia $CE=r$, $KC=s$, $HC=x$, $MN=ON=z$, $HN=u$, $EG=\omega$. Avremo $EG^2(\omega^2) : HN^2(u^2) :: CG^2 : CN^2 :: s^2+\omega^2 : s^2+z^2$, (795) e quindi $s^2 : s^2+z^2-u^2 :: \omega^2 : u^2 :: EG^2 : HN^2 :: CE^2(r^2) : CH^2(x^2)$. Dunque $s^2 : z^2-u^2 :: r^2 : x^2-r^2$, d'onde $z^2-u^2=(z+u)(z-u)=HO \times MH=\frac{s^2}{r^2}(x^2-r^2)$, equazione analoga a quella ottenuta per gli assi e per i diametri, ma più generale, e dalla quale può dedursi un teorema simile a quello già concluso nel caso medesimo per l'ellisse (778).

799. Ecco alcuni problemi la cui soluzione dipende dagli esposti principj.

I. Dati gli assi a, b d'un' iperbola, trovar due diametri
149 conjugati che faccian tra loro il dato angolo $p=DCM$. Abbiamo $mn\,sen\,p=ab$ ed $m^2-n^2=a^2-b^2$, che danno m ed n; e per trovar la direzione di un de' diametri o l'angolo MCP che chiamo c, il triangolo CMP dà (674) $MP=m\,sen\,c$; dunque essendo (796) $b : a :: MP : CE$, sarà $CE=\frac{am\,sen\,c}{b}$; ma nel triangolo DCE (673) si ha $CE=n\cos(p+c)$; dunque $\frac{am}{bn}sen\,c = \ldots\ldots$ $\cos p\cos c - sen\,p\,sen\,c$ (641), e perciò $\frac{sen\,c}{\cos c}=tang\,c=\ldots$ $\frac{bn\cos p}{am+bn\,sen\,p}$: e poichè $a=\frac{mn\,sen\,p}{b}$, sarà $tang\,c=\frac{b^2\cot p}{m^2+b^2}$.

II. Dati i semidiametri conjugati m, n d' un' iperbola e l' angolo p che fanno tra loro, trovare i due assi e la lor direzione. Ciò potrebbe aversi con le due equazioni e col raziocinio del passato problema: è però più semplice l' usare gli asintoti. Per l' estremità M del primo diametro CM condotta TMt parallela al secondo diametro Dd, e che farà con MQ l'angolo $TMQ=p$, e presa $TM=Mt=DC$, si condurranno CT, Ct: quindi diviso l' angolo TCt in mezzo con CA, sarà CA

l' asse primo, ed alzata in A la normale BA, e in C la CF= BA, sarà CF l'asse secondo (788). 149

III. Trovar gli assi, il centro e i fuochi di un' iperbola data. Condotte comunque due corde parallele *pk*, *mh* si 151
faccia passare per la metà O, I delle medesime la retta ID prolungata fino all' iperbola opposta, se questa pure sia data. La parte D*d* di questa retta intercetta fra le due iperbole sarà un diametro, e sulla metà C di essa sarà il centro cercato (795.2.°). Che se l'iperbola opposta manchi, si conducano due altre corde parallele fra loro, ed oblique alle due prime; ed il centro sarà in questo caso nell' intersezione delle due rette, che dividono respettivamente in mezzo l' una e l' altra coppia di parallele. Con questo centro, e con un raggio qualunque descrivasi un circolo in modo che tagli la curva in due punti; e sulla retta che riunisce i medesimi si conduca dal centro una normale: la parte di questa, intercetta fra il centro e la curva, sarà, come é evidente, il semiasse trasverso. Quanto al conjugato potrà aversi conducendo all' asse un' ordinata qualunque MP, cercando una media proporzionale fra le due ascisse AP, *a*P, e quindi una quarta dopo la media suddetta, l' ordinata MP, e il semiasse trasverso CA. Tutto questo è evidente per l' equazione alla curva. Quanto ai fuochi si troveranno col metodo già dichiarato (746).

800. La rettificazione, la quadratura ed altre proprietà di queste e delle seguenti Curve, si troveranno nel Calcolo Integrale. Qui frattanto porremo al solito alcuni problemi e teoremi da sciogliersi o dimostrarsi per esercizio e studio dei principianti e che serviranno nel tempo stesso a far rilevare altre notabili proprietà spettanti a ciascuna delle sezioni coniche.

I. Nella parabola, come pure nelle altre sezioni coniche, la tangente al vertice è anche normale all' asse.

Ris. Dalle espressioni del raggio vettore in ciascuna curva si dedurrà in primo luogo, che il vertice è fra tutti i punti di ciascuna sezione il più vicino al prossimo fuoco. Di qui, dalla natura della tangente (461), e dalla nota proprietà della normale (443) si concluderà la verità del teorema.

II. Suppongasi che la corda NM nella parabola NEM divida in mezzo l' angolo LMD, fatto dall' asse o diametro ML 138

138 colla DM tangente al vertice o origine M: determinare il valore delle coordinate NL, LM.

Ris. Osservando che il triangolo NML è isoscele, si concluderà NL=ML. Di qui e dall' equazione alla curva si dedurrà che ciascuna delle due coordinate eguaglia il parametro.

137 III. Nella stessa curva abbiasi l'asse AN colle ordinate MP, EN distanti fra loro d' un intervallo PN eguale al parametro: determinare il rapporto di EN ad MN.

Ris. Introdotto nel valor di MN dato dal triangolo rettangolo MNP, quello di MP dato dall'equazione alla curva, e osservando che $p+AP=AN=\frac{EN^2}{p}$ si troverà MN=EN.

158 IV. Condotta comunque nella parabola VSν la corda Nn, e dai punti N, n le Pn, NR ordinate sull' asse o diametro TQ, determinare la ragione delle ascisse SP, SF, SR; e nel caso che la corda attraversi l'asse ad una distanza dal vertice eguale al parametro p, dimostrare che il prodotto delle due ordinate è eguale a p^2.

Ris. Dai triangoli simili NRF, PnF e dall' equazione alla curva si avrà primieramente $PF^2 : FR^2 :: SP : SR$. Di qui $FR^2 - PF^2 : FR^2 :: SR - SP : SR$; d' onde osservando che $FR^2 - PF^2 = (FR+PF)(FR-PF) = PR(FR-PF)$, che $SR-SP=PR$, e in seguito che $SR-FR=SF$ si giungerà facilmente all' equazione $PF\times SR=FR\times SF$. Questa dà $SF : PF :: SR : FR$, e quindi $SF-PF : SF :: SR-FR : SR$, ossia $SP : SF :: SF : SR$, onde la ragione cercata è continua geometrica. Di qui $Pn\times NR = p\times SF$, e nel caso di $SF=p$, $Pn\times NR=p^2$.

152 V. Supposte nella parabola IBN le due parallele MF, DB ordinate al diametro IL, e tagliate in G, K dalla corda IN, determinare il rapporto dei rettangoli $MF\times GF$, $DB\times KD$.

Ris. I triangoli simili GIF, KDI e l'equazione alla curva danno $GF : KD :: MF^2 : BD^2$; dunque $GF\times MF : KD\times BD :: MF^3 : BD^3$, cioè i dati rettangoli stanno come i cubi delle ordinate MF, BD.

VI. Nella stessa parabola sia IE tangente all' origine I del diametro ID, e da due punti H, E di essa sieno condotte sulla corda NI le rette HG, EK parallele al diametro ID: determinare il rapporto dei rettangoli $CH\times HG$, $EM\times EK$.

Ris. Si rifletterà che HC, EM corrispondono sul diametro a due ascisse, ed HI, EI_2 alle loro ordinate; quindi 152
applicato il raziocinio del problema precedente si troverà che i dati rettangoli stanno come $GH^3 : EK^3$.

VII. Sull'asse ID della parabola MIT si prenda l'ascissa IF eguale al parametro, e condotta comunque per F la corda MT, se ne uniscano l' estremità M, T col vertice I: determinare il valore dell' angolo MIT.

Ris. Condotte le ordinate MQ, TO avremo (Probl. IV.) $IO \times IQ = IF^2 = OT \times MQ$. I triangoli rettangoli IOT, IMQ son dunque simili (527), e gli angoli MIQ, ITO sono eguali. Quindi $MIQ + OIT = 90°$ (485.3.°); onde il dato angolo è retto.

VIII. Sull' origine S del diametro o asse SR abbiasi la tangente SC, da un di cui punto qualunque C sia condotta la 158
secante CN che incontri la parabola in n, N, e il diametro in F: determinar la ragione delle parti Cn, CF, CN.

Ris. Le ordinate nF, NR parallele fra loro e alla tangente (755) danno $SP : SF :: Cn : CF$, ed $SF : SR :: CF : CN$. Da queste e dalla proporzione stabilita al Problema IV. si concluderà $Cn : CF :: CF : CN$; perciò la cercata ragione è continua geometrica.

IX. Da un punto qualunque E di EI tangente all'origine I del diametro ID si conduca fino alla parabola la retta EM 152
parallela al diametro, e la secante ET all' estremità T della retta MT ordinata al punto M: dimostrare che sarà CE=CO.

Ris. Dalla proporzione precedente e dai triangoli simili MTE, OFT si avrà $CE : EO :: MF : MT$; onde come MT è doppia di MF (755), sarà pure EO doppia di CE, e perciò CE = CO.

X. Condotta ai vertici A,M di due diametri qualunque AB, MG della parabola AIM, le tangenti AF, CM, ciascuna 159
delle quali sia prolungata fino all' incontro col diametro corrispondente all' altra, determinare in qual rapporto restino tra loro divise.

Ris. Condotta l' ordinata AR, si avrà CA=MR=FM (758); di qui e dai triangoli simili CAD, DFM si avrà AD= DF, CD = DM, cioé le due tangenti si divideranno in parti eguali.

XI. Poste le stesse cose determinare il rapporto delle
159 due tangenti CM, AF.

Ris. Sieno p', p'' i parametri dei due diametri. Condotte le ordinate AR, KM si rifletterà che queste son parallele alle tangenti. Da ciò, dall'equazione ai diametri, e dall'essere MR=FM (758)=AK si dedurrà $CM^2 : AF^2 :: p' : p''$.

153 XII. Per il fuoco F della parabola MAm passi comunque la corda Mm, alle cui estremità sieno condotte le tangenti MT, mT: determinare dove e sotto qual angolo s' incontreranno.

Ris. Si estenda MT fino all'incontro in H col prolungamento dell'asse, e si conduca inoltre TB sulla metà di Mm, ed FA dal fuoco F al punto A, ove TB taglia la curva. Dal triangolo MBT simile ad MFH isoscele (750) si avrà TB=MB=(755) mB = (756) $\frac{1}{2}p'$ = (755) 2FA= (756) 2AT. Le prime due equazioni fan conoscere che l' angolo MTm é retto, perchè resterebbe iscritto nel semicircolo, che avesse per diametro Mm; l' ultima dando AT=FA, mostra che il punto T spettante al diametro AB, parallelo di sua natura all' asse, è necessariamente nella direttrice (749).

XIII. Poste le stesse cose dimostrare che la linea TF condotta dal punto di concorso al fuoco, è normale alla corda mM.

Ris. Riflettendo che AF=AT=AB, e ragionando come nel Problema precedente, troveremo che anche l'angolo TFB sarà retto.

140 XIV. Sia nella parabola MAM' la corda MM' ordinata al diametro AR del parametro p', e venga incontrata in F dal diametro IF condotto da un punto qualunque I della curva. Determinare il valore del rettangolo fatto dalle parti FM, FM' della corda.

Ris. Condotta IS, avremo (574.V.°) $MF \times FM' = MR^2 - FR^2 = MR^2 - IS^2 = p'(AR - AS) = p' \times IF$.

XV. Abbiansi nella stessa parabola le due corde MM', DK, che si taglino comunque in F; determinare il rapporto dei rettangoli $MF \times FM'$, $DF \times FK$ fatti dalle parti in cui ciascuna delle corde resta respettivamente divisa.

Ris. Supposti p', p'' i parametri dei diametri, ai quali le due corde sono ordinate, il risultamento del precedente problema darà $MF \times FM' : DF \times FK :: p' : p''$.

XVI. Si abbiano due parabole DAG, dag descritte sullo stesso asse AL e con lo stesso parametro, ma con fuoco diverso, e sia condotta comunque e dovunque nella parabola esterna la corda BE: determinare il rapporto delle parti Bb, eE di questa corda, intercette fra le due curve, e il valore del rettangolo $Bb \times bE$ fatto da una di esse parti Bb, nella rimanente porzione bE della corda. 154

Ris. Poichè le due parabole hanno un parametro eguale, tutti i diametri che nell' una e nell' altra sono ad egual distanza dall' asse, e perciò coincidenti, avranno pure un egual parametro, e saranno incontrati sotto uno stesso angolo delle loro coordinate (762.I.°), le quali perciò in tutti i punti comuni a due diametri coincidenti, dovranno esse pure necessariamente coincidere. Sia dunque HK un diametro della parabola esterna che passi per m sulla metà di BE. Sarà BE ordinata a questo diametro sul punto m, e be sarà ordinata sul medesimo punto al diametro hK nella parabola interna. Di qui facilmente si dedurrà $Bb = eE$. Di più condotta nell'esterna la corda Oo tangente all' interna sull'origine h del diametro hK, chiamato p' il parametro comune, e fatte $Hh = b$, $hm = x$, avremo $Bb \times Be = (Bm - bm)(Bm + bm) = Bm^2 - bm^2 = p'(x+b) - p'x = p'b = Oh^2$, prodotto costante qualunque siasi la corda. Di qui può anche inferirsi, che le due curve son fra loro asintotiche, cioè che prolungate tenderanno sempre ad avvicinarsi senza incontrarsi giammai.

XVII. Nell' ellisse e nell'iperbola il prodotto degli assi è sempre minore del prodotto di due diametri conjugati qualunque.

Ris. In ambedue le curve $mnsenp = ab$ (774.799.I.°); di qui chiaramente $mn > ab$.

XVIII. L' asse trasverso $2a$ è maggiore nell' ellisse, minore nell' iperbola d'ogni diametro trasverso $2m$. Ma l'asse conjugato $2b$ è minore in ambedue le curve d'ogni diametro conjugato $2n$.

Ris. Supposte x, y le coordinate all' origine del diametro m, si troverà sì per l'una che per l' altra curva $m^2 = x^2 + y^2 = (764.780.746.)\ a^2 + \frac{e^2}{a^2}(x^2 - a^2)$; e poichè nell' ellisse

è sempre $x<a$, nell' iperbola $x>a$, dunque in quella $a>m$, in questa $a<m$. Ciò vale per il diametro trasverso : quanto al conjugato, poiché per ambedue insieme le curve abbiamo $a^2 \pm b^2 = m^2 \pm n^2$ (774.1.° 797.5.°), dunque è manifesto che sì nell'ellisse ove $a>m$, che nell'iperbola ove $a<m$, dovrà aversi $b<n$.

XIX. Nell' ellisse e nell' iperbola la somma e la differenza degli assi sono respettivamente l' una minore, l' altra maggiore della somma e della differenza di due qualunque diametri conjugati.

Ris. Poichè nell' ellisse $m^2+n^2=a^2+b^2$ (774) ed $mn>ab$ (prob. XVII.) , sarà dunque $(m+n)^2>(a+b)^2$, $(m-n)^2<(a-b)^2$; quindi $m+n>a+b$, ed $m-n<a-b$. E poichè nell' iperbola $m^2-n^2=a^2-b^2$ (797.5.°), ed $n>b$, $mn>ab$ (probl. XVII.XVIII.), sarà 1.° $m^2+n^2>a^2+b^2$, 2.° $(m+n)^2>(a+b)^2$, quindi $m+n>a+b$; onde avendosi $(m+n)(m-n)=(a+b)\times(a-b)$, perciò $m-n<a-b$.

155 XX. Ai vertici A, a di qualunque diametro Aa di un ellisse o di un'iperbola si conducano le tangenti AD, ad, che incontrino in D, d la retta Dd tangente nel punto qualunque M : determinare il valor del rettangolo $AD \times ad$.

Ris. Prolungato il diametro e la tangente Dd fino al loro incontro in T, e condotta l' ordinata MP, dai triangoli simili PTM, ATD, aTd avremo AD : AT : : MP : PT, ad : aT : : MP : PT, onde $AD \times ad = \frac{MP^2}{PT^2} \times AT \times aT$, cioè applicati i noti valori (775. 776. 795.) $AD \times ad = n^2$.

XXI. Poste le stesse cose, e soltanto cangiato in asse il diametro, l'angolo che fanno fra loro le rette fD, fd condotte da uno qualunque dei fuochi f all' estremità D, d delle tangenti AD, ad, sarà retto.

Ris. Avendosi in questo caso $AD \times ad = b^2 = Af \times fa$ (747), i triangoli DAf, fad saranno simili (527), e quindi eguali gli angoli ADf, afd. Dunque $afd + AfD = ADf + AfD = 90°$ (485.3.°), e perciò anche $Dfd = 90°$ (430). Può anche osservarsi che $Dd^2 = 4\frac{(a^4-e^2x^2)}{a^2-x^2}$, $fd^2 = \frac{2(a+e)(a^2+ex)}{a+x}$, $fD^2 = \frac{2(a-e)(a^2+ex)}{a-x}$; onde $Dd^2 = fd^2 + fD^2$, e perciò l' angolo Dfd retto (532).

XXII. Se dal fuoco f di un iperbola o di un ellisse si conduca sulla tangente Dd la normale fE, e le rette AE, aE dai vertici A, a l'angolo AEa sarà retto. 155

Ris. Rinnuovata la costruzione dei due problemi precedenti, e immaginati descritti due circoli l'uno sul diametro Df, l'altro sul diametro fd, il primo passerà per i vertici A, E degli angoli retti DAf, DEf, l'altro per i vertici E, a degli angoli retti fEd, fad. Quindi i due angoli DEA, DfA iscritti nel primo sulla corda comune AD, e i due angoli dEa, dfa iscritti nel secondo sulla comun corda ad saranno respettivamente eguali fra loro. Dunque DEA+dEa=DfA+dfa= (probl. prec.) 90°, e quindi anche AEa=90°.

XXIII. Poste sempre le stesse cose, e condotta inoltre dal centro C la CE al piede della perpendicolare fE, determinare il valor di CE.

Ris. Il circolo descritto sul diametro Aa passa per E: dunqne CE=CA=a semiasse trasverso.

XXIV. Nell'ellisse e nell'iperbola il quadrato della normale condotta dal fuoco sulla tangente sta al quadrato del semiasse minore, come il raggio vettore che partendo dal medesimo fuoco va al punto di contatto, a quello che vi va partendo dall'altro.

Ris. Sostituito in $q=\frac{b^2z}{an}$ (770.787) l'opportuno valor di n (768,786), si avrà $q^2=\frac{b^2z}{2a\mp z}$; di qui la proporzione assegnata.

XXV. Nelle stesse due curve, le normali condotte da ciascun dei fuochi sulla tangente, son proporzionali ai raggi vettori corrispondenti.

Ris. Per l'una di queste normali si ha $q=\frac{b^2z}{an}$, per l'altra $q'=\frac{an}{z}$ (770.1.° 787). Di qui, operando come sopra, avremo la data proporzione.

XXVI. Nelle medesime curve il prodotto dei raggi vettori condotti all'estremità di un diametro eguaglia il quadrato del semidiametro conjugato.

Ris. Chiamati z,z' i due raggi vettori, si ha per le due curve $zz' =$ (765.781) $\left(a + \frac{ex}{a}\right)\left(\pm a \mp \frac{ex}{a}\right) = \pm a^2 \mp \frac{e^2x^2}{a^2} =$ (probl. XVIII.) $\pm a^2 \mp m^2 + b^2 \mp n^2$ (774.797.5.°).

156 XXVII. Nell' ellisse se una secante HM incontri esteriormente in H il diametro FE prolungato, il rettangolo del diametro prolungato HF nel prolungamento HE, sta a quello dell' intera secante HM nella sua parte esteriore HO, come il quadrato di esso diametro al quadrato del diametro parallelo alla secante.

Ris. Ripetuta la stessa costruzione che al Num.° 778, ritenute le stesse denominazioni, e rinnovati gli stessi calcoli e raziocinj, si perverrà parimente all' equazione $z^2 - u^2 = \frac{s^2}{r^2}(r^2 - x^2)$. Questa, cangiati i segni, diviene $u^2 - z^2 = \frac{s^2}{r^2} \times (x^2 - r^2)$. Ora $u^2 - z^2 = (u + z)(u - z) = (HN + MN)(HN - MN) = HM \times HO$, ed $x^2 - r^2 = (x + r)(x - r) = (HC + CF)(HC - CE) = HF \times HE$. Dunque $HF \times HE : HM \times HO :: r^2 : s^2$.

157 XXVIII. Nell' iperbola se una secante HM parta da un qualunque punto H del diametro FE, il rettangolo delle due parti FH, EH del diametro sta a quello della secante nella sua parte esteriore, come il quadrato di esso diametro al quadrato del diametro parallelo alla secante.

Ris. Ripetuta qui pure la stessa costruzione che al num.° 798, e ritenute le stesse denominazioni, si giungerà nel modo medesimo all'equazione $z^2 - u^2 = \frac{s^2}{r^2}(x^2 - r^2)$, da cui nasce l'altra $u^2 - z^2 = \frac{s^2}{r^2}(r^2 - x^2)$. Ora, siccome è facile ritrovare, $u^2 - z^2 = MH \times HO$, ed $r^2 - x^2 = FH \times HE$, dunque $FH \times HE : MH \times HO :: r^2 : s^2$.

158 XXIX. Supposto che le corde MO, PD si taglino in un punto H dentro l'ellisse, o dentro una delle due iperbole opposte, assegnare un rapporto fra i rettangoli $MH \times HO$, $PH \times HD$ fatti dalle parti in cui ciascuna corda è divisa.

Ris. Condotto per H il semidiametro $AC = r$, fatto $CH = x$, e chiamati s, t i semidiametri paralleli alle corde avremo

per la prima (778.798) HO$\times$HM$=\frac{s^2}{r^2}(\pm r^2 \mp x^2)$, per la se- 158
conda PH$\times$HD$=\frac{t^2}{r^2}(\pm r^2 \mp x^2)$; e il rapporto richiesto sarà di $s^2 : t^2$. Quindi se l'ellisse si cangi in un circolo ove $s=t$, i rettangoli si eguaglieranno, come già si sapeva (538).

XXX. Supposto che le due corde si cangino nelle secanti MH, DH, determinare il rapporto dei rettangoli MH$\times$HN, HD$\times$HG, fatti da ciascuna secante intera nella sua parte esteriore.

Ris. Unito H col centro C della curva, posto r il semidiametro AC, s, t i semidiametri paralleli alle secanti, richiamati i teoremi XXVII, XXVIII, e operando nel resto come al precedente problema, il rapporto cercato si troverà di $s^2 : t^2$: onde riguardo all'ellisse, se questa si cangi in un circolo, i due rettangoli si eguaglieranno, come era già noto (540).

XXXI Due tangenti condotte da un punto stesso sull'iperbola o sull'ellisse, stanno fra loro come i diametri paralleli.

Ris. S'immaginino le due secanti del probl. prec. convertite in tangenti; i rettangoli di quelle diverranno quadrati di queste; di qui il teorema attuale.

XXXII. Due ellissi o iperbole simili, cioè con gli assi $2a$, $2b$, $2a'$, $2b'$ respettivamente proporzionali, hanno propor- 159
zionali anche i diametri corrispondenti, ossia quei diametri che fanno fra loro, o con l'asse un angolo stesso; in generale hanno proporzionali tutte le loro dimensioni omologhe.

Ris. Soprapposte le due curve in modo che i centri coincidano in un sol punto, e gli assi in una medesima retta, anche i diametri corrispondenti coincideranno. Sia BE$=2m$ l'uno, PF$=2m'$ l'altro: condotte sull'asse le ordinate EM$=y$, FR$=y'$, chiamate x, x' le loro ascisse CM, CR, e riflettendo che dall'ipotesi abbiamo $\frac{b}{a}=\frac{b'}{a'}$, i triangoli simili CRF, CME daranno $m^2 : m'^2 :: x^2 : x'^2 :: y^2 : y'^2 :: \pm a^2 \mp x^2 : \pm a'^2 \mp x'^2 :: a^2 : a'^2 :: b^2 : b'^2$. Di qui manifestamente il teorema, che nel modo medesimo può estendersi a tutte le dimensioni omologhe.

XXXIII. Date due ellissi o due iperbole simili, con-
159 centriche, e con gli assi coincidenti, se nella curva esteriore si conduca una corda NO che passi per l' interiore, le parti NI, HO di questa corda, intercette fra le due curve, saranno eguali; e il rettangolo $HO \times HN$ di una di queste parti nella rimanente porzione della corda, eguaglierà il quadrato LP^2 della tangente LP, condotta alla curva interiore sull' origine P del diametro PF, che divide in mezzo la corda, e terminata all' incontro in L con la curva esteriore.

Ris. Con raziocinio analogo a quello tenuto al probl. XVI. si proverà che PF diametro divide in mezzo la corda IH; d'onde NI$=$HO. Quindi chiamata x l'ascissa CD, m, m' i due semidiametri CB, CP, n, n' i lor conjugati, e riflettendo che la similitudine delle curve interna ed esterna dà $m : m' :: n : n'$, avremo (775.795) $OD^2 : HD^2 :: \pm m^2 \mp x^2 : \pm m'^2 \mp x^2$, ed $OD^2 : OD^2 - HD^2 :: \pm m^2 \mp x^2 : \pm m^2 \mp m'^2 :: OD^2 : LP^2$. (775.1°795.1.°) Dunque $LP^2 = (OD + DH)(OD - DH) = NH \times HO$.

XXXIV. Condotta fra le due opposte sezioni di un
160 iperbola equilatera la retta AD parallela all'asse BE, ed unite l' estremità A, D della medesima con uno dei vertici B, dimostrare che l' angolo ABD sarà retto.

Ris. Si conducano le ordinate AP, DQ e la tangente GB. Si troverà $GB^2 = AP^2 = DQ^2 =$ (780) $EP \times BP = BQ \times QE = GD \times AG$: e perciò retto l' angolo ABD (529.2.°).

XXXV. Prolungata fino agli asintoti CT, Ct dell'iper-
161 bola MAm la Tt tangente in qualunque punto M, dimostrare che la superficie del triangolo TCt sarà sempre costante, ed eguaglierà il doppio della potenza m^2 dell' iperbola nel seno dell' angolo dei due asintoti.

Ris. Condotte NM, MO parallelamente ai due asintoti, e osservando che TM$=$Mt(791), si concluderà che sono eguali i triangoli TNM, OMt e che perciò O$t$$=NM=$OC. Ma OM$t$$=$ $\frac{1}{2}$ MNOC$=$ $\frac{1}{2}$ $CN \times OC \times sen NCt$ (570.674) $= \frac{1}{2} m^2 sen NCt$ (789), dunque TC$t$$=TNM+MOt$$+$MNOC$= 2m^2 sen NCt$.

XXXVI. Da due punti qualunque C, E degli asintoti
162 AC, AE e parallelamente ai medesimi sieno condotte le rette EL, CL prolungate fino al loro concorso in L; dal punto D ove la prima taglia la curva sia inoltre abbassata la DG pa-

rallela ad AE, e sia infine unito il punto A col punto L: 162
determinar la ragione delle tre rette AI, AH, AL.

Ris. Condotta BH parallela ad AE avremo (789) $AB \times BH = m^2 = AG \times GD = AG \times CL$, d' onde AB : AG : : CL : BH : : AL : AH : : AH : AI : quindi la ragion cercata è continua geometrica.

XXXVII. Se in qualsivoglia sezione conica si fa pas-
sare la tangente indefinita RT per l' estremità dell' ordinata 163
FM alzata sul fuoco F, ogni altra ordinata PS protratta fino all' incontro in R colla tangente, eguaglierà il raggio vettore FS condotto da F al punto S ove è intersecata la curva.

Ris. Per ciascuna delle tre curve si ha $PR = \frac{FM \times PT}{FT} =$ (745) $\frac{p \times PT}{2FT}$: quindi per la parabola, ove la suttangente $FT = \frac{1}{2}p$ (752) e $PT = AP + AT = x + \frac{1}{4}p$, sarà $PR = x + \frac{1}{4}p = z$ (749). Per le altre due curve, ove $FT = \frac{\pm a^2 \mp e^2}{e}$ (768. 786) $= \frac{b^2}{e}$ … (746), e $PT = \pm CT \mp CP =$ (768. 786) $\frac{\pm a^2 \mp ex}{e}$, e $p = \frac{2b^2}{a}$ … (744) sarà parimente $PR = \pm a \mp \frac{ex}{a} = z$ (765. 781).

XXXVIII. Dato un segmento LNM di qualunque sezione conica iscrivervi il triangolo massimo.

Ris. Condotta la corda PQ parallela alla base LM del segmento, si faccia passare per la metà di ambedue la retta NK: il triangolo LNM sarà il cercato. Infatti NK sarà diametro (762. III. 779. III. 799. III.), ed NB tangente all' origine N sarà parallela ad LM. Perciò ogni altro triangolo iscritto sul dato segmento avrà con LNM comune la base, e minore l' altezza; e quindi sarà minore (575).

XXXIX. Il triangolo LNM iscritto nel segmento parabolico LNM è quadruplo dei triangoli massimi iscritti sui segmenti terminati dai lati LN, NM.

Ris. Per la metà di NM si faccia passare il diametro HD, e si prolunghi fino all' incontro in B con la NB tangente in N vertice del triangolo dato. Per il teorema precedente

sarà NHM il massimo triangolo iscrittibile nel segmento NHM.
164 Ora avendosi NC = CM, e BH = HC (758), i tre triangoli MCH, HCN, HNB, e i tre MCD, NCB, NHM saranno respettivamente eguali in superficie (575.435.2.°). Dunque il triangolo KNM eguaglia il parallelogrammo KB quadruplo del triangolo NCB, con cui ha comune l'altezza e di cui ha doppia la base (570): e perciò KNM è quadruplo di NCB e quindi di NHM. E potendo altrettanto dimostrarsi rapporto al triangolo massimo nel modo medesimo iscrittibile sull' altro lato LN, è dunque manifesta la verità del teorema, dal quale è quindi assai facile inferire che tutta la superficie del segmento parabolico LNM eguaglia il prodotto di quella del triangolo LNM nella somma S della serie $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{4^4} +$ ec. Or poichè si ha in generale (581) $\frac{x}{x-1} = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} +$ ec., è dunque chiaro che fatto $x=4$, sarà $S = \frac{4}{3}$; cioè il segmento parabolico LNM è $\frac{4}{3}$ del massimo triangolo iscritto. Che se sia N il vertice della parabola, e il segmento venga perciò tagliato in mezzo dall'asse NK, la superficie del semisegmento LNK sarà allora $\frac{2}{3}$ del rettangolo delle coordinate, fra le quali è racchiuso. Ma ciò vedremo anche meglio nel luogo accennato (800).

ALTRE CURVE.

Oltre le Curve Coniche, di tanto uso in Geometria, in Fisica e nelle Arti, ve ne son più altre di cui è bene il far menzione.

801. I.° La Concoide di Nicomede. Se per un punto B preso
165 fuori di una retta GH, si conducano delle rette BQM, BAD ec. tali che le parti QM, AD ec. sieno eguali, la curva MDM' che passa per i punti M, D ec. si chiama *concoide*. Il punto B è il *polo*, la retta GH la *direttrice*, e prese sotto GH le parti eguali Q*m*, A*d* ec., la curva *mdm'* è la concoide *infe-*

riore o la parte inferiore d' una stessa concoide . Onde 1.° GH ne é l'asintoto; 2.° Dd normale a GH ne misura la massima larghezza; 3.° se BA$>d$A, la curva è qual si vede alla fig. 165 ; se BA$<d$A, ha un *nodo* Bndn' , e allora si chiama concoide *annodata* ; se BA$=d$A , il nodo svanisce e resta un punto di regresso in B . 165 166

802. Per saper se la concoide é curva algebrica, si conduca PM perpendicolare ad AP e sia AD$=$QM$=a$, AB$=b$, AP$=x$, PM$=y$: si avrà PQ : PM : : AQ : AB , ovvero $\sqrt{(a^2-y^2)}$: y : : $x-\sqrt{(a^2-y^2)} : b$, onde $xy=(b+y)\sqrt{(a^2-y^2)}$, equazione alla concoide superiore: lo stesso calcolo dà $xy=(b-y)\sqrt{(a^2-y^2)}$ per l' inferiore , e l'equazione è la stessa per l'annodata ; e se si facesse $x=$AR ed $y=$RM, si verrebbe a cangiare x in y ed y in x , e l' equazione sarebbe $xy=(b+x)\sqrt{(a^2-x^2)}$; dunque la curva è algebrica del terz' ordine . Essa può descriversi con la continua intersezione d'una riga BCM mobile intorno a B; e d' un circolo descritto col raggio CM$=a$, che si farà muovere in modo che il centro C sia sempre in HG ; basta allora che la riga passi costantemente per il centro del circolo . 165 167

803. Possono anzi formarsi infinite concoidi differenti sostituendo al circolo una curva qualunque CM e al centro di esso un punto fisso Q dell' asse di essa. Troviamone l' equazione . Condotte MP, AB perpendicolari alla direttrice, e fatta AP$=x$, PM$=y$, CP$=z$, CQ$=a$, AB$=b$, sarà PQ$(z-a)$: PM(y) : : AQ $(x+a-z)$: AB (b) ; onde $z=a+\frac{xy}{b+y}$, valore che sostituito nell' equazione della curva CM, dà quella della concoide MD. Per esempio, se la curva CM è un circolo il cui centro sia Q, si ha $y^2=2az-z^2$, che dà $xy=(b+y)\sqrt{(a^2-y^2)}$ come sopra : e se la curva CM é una parabola dell' equazione $y^2=pz$, allora $y^3+by^2-apy-apb=pxy$ è l'equazione della concoide parabolica . 168

804. II.° La Cissoide di Diocle . Se condotta al circolo ANB del raggio CB la tangente QBq e le rette AQ a varj punti di essa , si prenda QM$=$AN , la curva MAm, che passa per i punti M , m così determ·nati , si chiama *cissoide* . 169

805. Per trovarne l' equazione , conduco OM parallela ad

AP, ed MP,NG perpendicolari; fatta AP$=x$, PM$=y$, e AB$=a$
169 diametro del circolo *genitore*, essendo AN$=$MQ, sarà AG$=$ PB, ed AG $(a-x)$: GN $(\sqrt{(ax-x^2)})$: : AP (x) : PM (y) $= \frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{(a-x)}}$, onde $y^2 = \frac{x^3}{a-x}$, equazione cercata, da cui si vede 1.° che quando $x=0$, anche $y=0$; e però la curva passa per l'origine dell'ascisse; 2.° che se $x=\frac{1}{2}a$, si ha $y=\pm\frac{1}{2}a$, cioé i due rami della cissoide tagliano la circonferenza a distanze eguali da A e B; 3.° che se $x=a$, y è infinita, e che perciò BQ è l'asintoto della curva ec. (788).

806. III.° La Logaritmica. Preso un punto A sull'indefinita HG e alzate dell'ordinate PM che abbian per logaritmi
170 le loro ascisse AP, la curva BMm, che passa per l'estremità di queste ordinate, dicesi *logaritmica*. Sia AP$=x$, PM$=y$, A$=$ al modulo, $e=2{,}7182818$ il cui logaritmo iperbolico é 1 (410); sarà $x=Aly=xle$, onde $y^A = e^x$, che dà $y=e^{\frac{x}{A}}$, equazion della logaritmica. Essa mostra 1.° che questa curva è trascendente (738): 2.° che l'ascisse x, x' della stessa ordinata y in diverse logaritmiche, o i logaritmi dello stesso numero in diversi sistemi, son come i moduli A, A'; 3.° che quando $x=0$, si ha $y=1=$AB; 4.° che se $x=$AE$=$AB$=1$, si ha $y=$EF$=e^{\frac{1}{A}}$, e però se in $y=e^{\frac{x}{A}}$, ad $e^{\frac{1}{A}}$ si sostituisca EF$=a$, sarà sempre $y=a^x$: onde se l'ascisse forman la progressione aritmetica ÷ 1, 2, 3, 4 ec., l'ordinate formeranno la geometrica ∺ a^1, a^2, a^3, a^4 ec., e però la logaritmica va all'infinito di là da AP. Ma prese verso AQ l'ascisse negative $x=-1$, -2 ec., l'ordinate diverranno $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{a^2}$ ec., cioè la curva ha un ramo infinito BO, di cui la direttrice o asse GH é l'asintoto.

807. IV.° La Cicloide. Se un circolo AG giri sopra una
171 retta Aa, finché il punto che toccava sul principio questa retta in A, la tocchi un'altra volta in a, questo punto descriverà una curva chiamata *cicloide* o *trocoide*. Ella è *ordinaria* quando il circolo *genitore* non ha altro moto che quello della

sua rivoluzione: ma se ha di più un moto di traslazione o nel medesimo senso o in senso contrario, ella è o *allungata* o *accorciata*. Nell' ordinaria la *base* Aa eguaglia la circonferenza del circolo genitore; è più corta nell'accorciata, maggiore nell' allungata. Il diametro BC del circolo genitore si chiama *asse* della cicloide quando è normale al mezzo della sua base: il punto B è il suo *vertice*, e BC la sua altezza maggiore. 171

808. Posto ciò, condotte MP normale a BC, e le corde eguali MF, OC, avremo $FC=MO$; dunque poichè $FC=AC-AF=BIOC-FKM=BIOC-OLC=BIO$, la parte MO dell'ordinata MP è sempre eguale all' arco corrispondente BIO del circolo genitore. Inoltre il resto OP è il seno del medesimo arco; dunque chiamando MP (y), BIO (u), si avrà per equazione alla cicloide ordinaria, $y=u+sen\,u$. Per generalizzarla si farà $MO=\frac{b}{a}BIO$, il che conviene alla cicloide o ordinaria o accorciata o allungata, secondo che b è eguale o minore o maggiore di a, e si avrà $y=\frac{b}{a}u+sen\,u$. La cicloide è dunque una curva trascendente (738).

809. Se il punto per descriver la cicloide si prenda dentro o fuori della circonferenza, la curva descritta sarà un' altra specie di cicloide; e se il circolo si faccia girare sulla circonferenza d' un altro circolo, la curva descritta da uno dei suoi punti, sarà un' *epicicloide*.

810. V.° La Quadratrice di Dinostrato. Se la retta AG tangente al circolo in A si muova uniformemente e parallelamente a se stessa lungo il diametro Aa, mentre il raggio AC gira uniformemente intorno al centro C verso il punto E, in modo che AG e AC si confondano con CE nel momento stesso; l' intersezione continua di queste due rette dà la curva AMD, chiamata *quadratrice*, dalla cui descrizione segue che uno spazio qualunque AP, percorso dalla retta AG sta all' arco circolare AB descritto nel tempo stesso dall' estremità del raggio, come un altro spazio AC percorso da quella retta, all'arco corrispondente ABE descritto dal raggio. Fatta dunque $AP=x$, $PM=y$, $AB=u$, $AC=r=1$, $ABE=90°=c$, si 172

avrà 1.° $x : u :: 1 : c$, onde $u=cx$; 2.° CP : PM :: CA :
172 AG, ovvero $1-x : y :: 1 : tang\,u$, onde $y=(1-x)\,tang\,cx$, equazione alla quadratrice quando l'origine dell'ascisse è in A.

811. Se sia in C, cangio x in $1-x$, ed ho $u=c(1-x)$ ed $y=x\,tang\,c\,(1-x)=(644)\,x\cot cx=(656)\,\frac{1}{c}-\frac{cx^2}{3}-\frac{c^3x^4}{3^2 5}-$ ec.; onde quando $x=0$, sarà $y=CD=\frac{1}{c}$, e però se si conoscesse la *base* CD della quadratrice, si avrebbe subito la quadratura del circolo; di qui è venuto il nome alla curva.

812. Se sia descritto col centro C e raggio CD il quadrante DLK, sarà (564) $\frac{1}{c}$: DLK :: $1 : c$; dunque DLK$=1=$CA. Così PC$=$ all' arco LD, perchè $\frac{1}{c}$: KL :: $1 : u :: 1 : c\,(1-x)$; onde KL$=1-x=$AP, e PC$=$LD.

813. Prese le ascisse negative AP', e sostituito il loro valore nella prima equazione, avremo $y=-(1+x)\,tang\,cx$, che dà l'ordinate negative P'M'. Quindi la curva ha un ramo AM', di cui la retta QN condotta alla distanza AQ$=r=1$, è l'asintoto; poichè fatto $x=1$, viene $y=-2\infty$.

Ben si vede 1.° che la retta AG e il raggio CA seguitando a muoversi dopo essersi confusi in CE, formano la parte D*a* della quadratrice: 2.° che se la curva fosse geometrica, si avrebbe qualunque angolo d' un dato numero di gradi, come di $\frac{90^\circ}{m}$, bastando dividere AC in P onde AP : AC :: $1 : m$, e condur l' ordinata PM e il raggio CB : l' angolo ACB sarebbe $=\frac{90^\circ}{m}$, poichè $x : 1 :: u : c :: 1 : m$.

814. VI.° La Spirale di Archimede. Si chiama così la curva
175 CKMA descritta da un punto C che si muove uniformemente lungo il raggio CA, mentre il raggio stesso si muove uniformemente intorno al centro C, in maniera che quando il raggio ha percorsa la circonferenza intera, questo punto si trovi confuso col punto A. Se prolungato il raggio CA, gli si faccia fare una seconda rivoluzione, mentre il punto C con-

tinua ad allontanarsi dall' origine del suo movimento, si descriverà una *seconda spirale*, poi una *terza* ec. : o piuttosto 173
queste spirali saranno una sola curva, le cui rivoluzioni possono accrescersi in infinito.

815. Posto ciò, l' ordinata CM (y) : raggio CA (a) : : arco ADBN, ascissa corrispondente (x): circonferenza ADBNA (p) : dunque l' equazione alla spirale d' Archimede è $y = \frac{ax}{p}$; onde 1.° la curva è trascendente; 2.° passa per il centro C, poichè $x=0$ dà $y=0$; 3.° passa altresì per A, poichè $x=p$ dà $y=a$; 4.° fatto $x=p+x'$, l'equazione diventa $y=a+\frac{ax'}{p}$, e perciò dati ad x' i valori che son tra o e p, la spirale fa una seconda rivoluzione che termina all' estremità d' un raggio doppio del primo; e ne fa una terza, una quarta ec. se $x=2p+x''$, $x=3p+x'''$ ec.

816. VII.° La Spirale Parabolica. Presa sopra un raggio
CN una media proporzionale NM tra l'arco AN e una retta 174
data g, la curva che passerà per i punti M determinati così, sarà la *spirale parabolica*. Sia dunque AN $= x$, CM$=y$, AC$=a$, ed avremo $y=a-\sqrt{gx}$; equazione in cui sostituendo $p+x$, $2p+x$ ec. in luogo di x, troviamo che quasta curva può fare un' infinità di rivoluzioni intorno al centro C, e che perciò è del numero delle spirali.

817. VIII.° La Spirale Iperbolica. Suppongo che dal punto
C preso per centro sull' indefinita CP si descrivano degli ar- 175
chi AG, QM, PO ec. eguali in lunghezza, e che per le loro estremità G, M, O ec. si faccia passare una curva CKGMO. Questa sarà una *spirale iperbolica*; e ben si vede che presa CB$=$AG$=$QM$=$PO ec. ed alzata BR parallela a CP, ella ne sarà l' asintoto, perchè può solamente incontrarla quando il raggio CM sia infinito.

818. Sia il raggio CA$=a$, AN$=x$, CM$=y$, AG$=$QM ec. $=b$; si avrà $x : b : : a : y$, onde $xy=ab$. Ora sostituiti ad x dei valori $p+x$, $2p+x$ ... $mp+x$, si avrà successivamante $y=\frac{ab}{p+x}$, $y=\frac{ab}{2p+x}$ . . . $y=\frac{ab}{mp+x}$; onde crescendo l'a-

scissa, scema l' ordinata, la quale diviene zero solo quando *m* é infinita; dunque *la spirale iperbolica fa un' infinità di giri intorno al centro prima di giungervi*.

819. IX.° La Spirale Logaritmica o Logistica. Si chiama
176 *spirale logaritmica* la curva che taglia sotto uno stesso angolo tutti i raggi CM condotti dal suo centro C, cosicché la tangente MT fa sempre un angolo stesso col raggio CM. Questa curva ha molte proprietà che non possono ben dettagliarsi senza il calcolo differenziale ed integrale.

LUOGHI GEOMETRICI

Costruendo l' equazione $y^2=2ax-x^2$ si trovò (731) che ne risultava un circòlo: questo circolo si chiama il *Luogo Geometrico* dell' equazione $y^2=2ax-x^2$.

820. In generale *il luogo d' un' equazione è la linea descritta secondo il rapporto delle* x *e delle* y *che l'equazione*
177 *contiene*, rapporto che somministra le costruzioni geometriche dell'*equazioni indeterminate*; così si chiamano tutte l'equazioni a due variabili, e se ne distinguono i gradi dalle più alte potenze di queste variabili. Cominciamo dal primo grado.

821. Ogni equazione di questo genere può esser rappresentata da $ay=bx+cm$, cioè $y=\frac{bx}{a}+\frac{cm}{a}$: si tratta di trovarne il luogo geometrico. Sia $AP=x$ la linea dell' ascisse di cui pongo l' origine in A; sia PM un' ordinata y che faccia con AP un angolo dato APM. Presa ora sopra AP una determinata $AB=a$ e parallelamente a PM condotta $BD=b$, i triangoli simili ABD, APN daranno $a : b :: x : PN=\frac{bx}{a}$; dunque se la data equazione fosse $y=\frac{bx}{a}$, la linea AN sarebbe il luogo cercato. Ma poichè il secondo membro ha di più $\frac{cm}{a}$, le PN debbono essere accresciute di questa quantità: perciò alzata sopra AP pa-

rallelamente a PM una AE$=\frac{cm}{a}$ e condotta per E l'indefinita 177
M'M parallela ad AN, sarà PM $=y=$PN$+$NM$=\frac{bx}{a}+\frac{cm}{a}$, onde la retta M'M é il luogo della data equazione. Se $\frac{cm}{a}$ fosse negativa, le PN dovrebbero diminuirsi di questa quantità, il che si fa conducendo AE' sotto ad AP e per E' una parallela MM'' ad AN, ed MM'' é il luogo dell' equazione $y=\frac{bx}{a}-\frac{cm}{a}$: la parte OM corrisponde al valor positivo di y, e il suo prolungamento OM'' a quello di $-y$; onde può concludersi in generale che *la linea retta è il luogo geometrico di tutte l' equazioni indeterminate del primo grado*.

822. Quelle del secondo posson tutte ridursi alla formula

$$y^2+axy+bx^2+cx+dy+f=0$$

la cui costruzione dà la natura delle curve espresse da equazioni del secondo grado, qualunque sia l' angolo delle coordinate. Risolvo pertanto quest' equazione, presa y per incognita (197), e poi fatto $y+\frac{1}{2}ax+\frac{1}{2}d=u$, trovo $u^2+(b-\frac{a^2}{4})x^2+(c-\frac{ad}{2})x+f-\frac{d^2}{4}=0$. Or per costruir l' equazione $y+\frac{1}{2}ax+\frac{1}{2}d=u$, supposte le coordinate AP$=x$, 178
PM$=y$ nel dato angolo, conduco AB $=\frac{1}{2}d$ parallela a PM 179
(sotto AP se d é positivo), e per mezzo di BO parallela ad 180
AP ottengo MO $=y+\frac{1}{2}d$. Sopra BO prendo ad arbitrio 181
BE$=1$, e condotta EF$=\frac{1}{2}a$ parallela a PM, e per B ed F l' indefinita BFN, i triangoli simili BEF, BON danno ON$=\frac{1}{2}ax$, e perciò MN$=u$. Ma le coordinate AP$=x$, MN$=u$ non sono in angolo tra loro come bisogna; e però per ridurvele, sia BN$=z$ e la retta nota BF$=n$ (682); si avrà $n:1::z:x=\frac{z}{n}$, ed $u^2+(b-\frac{a^2}{4})\frac{z^2}{n^2}+(c-\frac{ad}{2})\frac{z}{n}+f-\frac{d^2}{4}=0$.

Qui può accader 1.° che $b=\frac{a^2}{4}$, nel qual caso $y^2+axy+bx^2$

è un quadrato perfetto ; 2.° che $b > \frac{a^2}{4}$; 3.° che $b < \frac{a^2}{4}$: sicchè questa equazione è suscettibile delle tre seguenti forme, I. $u^2 - gz + r = o$, II. $u^2 + gz^2 - rz - s = o$, III. $u^2 - gz^2 - rz - s = o$.

823. Onde 1.° se nella I.ª $u^2 = gz - r = g(z - \frac{r}{g})$ si faccia $z - \frac{r}{g} = t$, sarà $u^2 = gt$, equazione alla parabola (748), che col
178 parametro g, coll' angolo MNC delle coordinate, e coll'origine C del diametro, determinata dal caso di $t = o$ che dà $z = \frac{r}{g} = BC$, facilmente si descrive (762) ; 2.° se nella II.ª $u^2 + gz^2 - rz - s = \frac{u^2}{g} + z^2 - \frac{rz}{g} - \frac{s}{g} + \frac{r^2}{4g^2} - \frac{r^2}{4g^2} = o$ si faccia $z^2 - \frac{rz}{g} + \frac{r^2}{4g^2} = t^2$, sarà $u^2 = g\left(\frac{r^2 + 4gs}{4g^2} - t^2\right)$, equazione all'ellisse che paragonata all' altra (775) $y^2 = \frac{n^2}{m^2}(m^2 - x^2)$, dà $\frac{n^2}{m^2} = g$,
179 ed $m^2 = \frac{r^2 + 4gs}{4g^2}$, onde $m = \frac{1}{2g}\sqrt{(r^2 + 4gs)} = CD$, ed $n = m\sqrt{g} = \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{r^2}{g} + 4s\right)} = CG$, coi quali semidiametri e col centro C determinato dal caso di $t = o$, da cui si ha $z = \frac{r}{2g} = BC$, è facile descriver la curva (779.II.): 3.° se nella III.ª $\frac{u^2}{g} - z^2 - \frac{rz}{g} - \frac{s}{g} - \frac{r^2}{4g^2} + \frac{r^2}{4g^2} = o$ si faccia $z^2 + \frac{rz}{g} + \frac{r^2}{4g^2} = t^2$, sarà $u^2 =$
180 $g\left(t^2 + \frac{4gs - r^2}{4g^2}\right)$, equazione all'iperbola, il cui centro C è determinato dal caso di $t = o$, da cui si ha $z = -\frac{r}{2g} = BC$; e quanto ai semidiametri, se $4gs > r^2$, paragonata l' equazione alla sua analoga (795), $y^2 = \frac{m^2}{n^2}(x^2 + n^2)$, avremo $n = \frac{1}{2g}\sqrt{(4gs -}$

r^2), ed $m=\frac{1}{2}\sqrt{\left(4s-\frac{r^2}{g}\right)}$: ma se $4gs<r^2$, l'equazione di con- 180
fronto sarà (795) $y^2=\frac{n^2}{m^2}(x^2-m^2)$ che dà $m=\frac{1}{2g}\sqrt{(r^2-4gs)}$
ed $n=\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{r^2}{g}-4s\right)}$; onde la curva si potrà sempre de-
scrivere (799.II.). Che se nell' equazione primitiva (822) man-
chi y^2, si libererà x^2 dal suo coefficiente, e si avrà un'equa- 181
zione $x^2+ayx+bx+py+q=x^2+(ay+b)x+py+q+$
$\left(\frac{ay+b}{2}\right)^2-\left(\frac{ay+b}{2}\right)^2=0$, e fatto $x^2+(ay+b)x+\ldots$
$\left(\frac{ay+b}{2}\right)^2=u^2$, l'equazione $u^2-\left(\frac{ay+b}{2}\right)^2+py+q=0$ sarà
all' iperbola e si costruirà come la terza formula. Infine se
manchi anche bx^2, liberato xy dal suo coefficiente, resterà
un' equazione $xy+ax+by-p=0$, ove fatto $b+x=u$, si ha
$yu+au-ab-p=0$, e fatto $y+a=z$, viene $uz=ab+p$, equa-
zione all' iperbola tra gli asintoti: onde poste le coordinate
AP, PM nel dato angolo APM, prolungata AP verso D, finchè 182
sia AD$=b$, e condotta DC$=a$ parallela a PM, si descriverà
tra gli asintoti CQ, CK l' iperbola della potenza $ab+p$ (789.
799.II.), e sarà QM$=a+y=z$, QC$=b+x=u$ e QM$\times$QC$=$
$uz=ab+p$.

824. Segue da tutto ciò che *qualunque equazione indeterminata del secondo grado appartiene a una sezione conica*, e che la sua specie dipende dai tre primi termini $y^2+axy+bx^2$ della formula generale. Perciò:

I.° Se questi tre termini formano un quadrato perfetto, cioè se $b=\frac{a^2}{4}$, o se non resta dei tre primi termini altro che y^2 o x^2, l' equazione apparterrà alla parabola.

II.° Se $b>\frac{a^2}{4}$, l' equazione è all'ellisse, che per altro
diviene un circolo quando CD$=m=$CG$=n=m\sqrt{g}$(823), cioè
$g=1$, e l'angolo BNM è retto; allora BE$^2=r=$BF$^2+$FE$^2=$ 179
$n^2+\frac{a^2}{4}$ (822); e poichè $g=(b-\frac{a^2}{4})\frac{1}{n^2}=1$, si ha $b=n^2+$

$\frac{a^2}{4}=1$, e l' equazione primitiva diventa $y^2+axy+x^2+cx+dy+f=0$.

III° Se $b<\frac{a^2}{4}$, l' equazione é all'iperbola, quand' anche b sia negativa; e se $b=1$, l' iperbola è equilatera. Se manca uno dei quadrati y^2, x^2, restando il rettangolo xy, la curva è egualmente iperbola; e se y^2, x^2 mancano nel tempo stesso, l' equazione è agli asintoti.

825. Può accadere che l' equazione proposta non sia realmente del secondo grado: tale è $y^2-xy+\frac{x^2}{4}=a^2$; la sezione Conica ch' essa rappresenta, degenera in linea retta, come dee succedere per una parabola il cui parametro sia nullo, e che perciò si confonde col suo asse. Che se l'equazione proposta implichi contradizione, il calcolo lo farà conoscere colle operazioni che indicherà, come conducendo a descrivere un circolo di raggio immaginario ec.

Problemi indeterminati del secondo grado

183 826. I. Dati i due punti A e B, trovare il luogo di tutti i punti M tali che l' angolo AMB sia sempre lo stesso. Condotta MP normale ad AB, sia AP$=x$, PM$=y$, AB$=a$, *tang*AMB $=t$; avremo (676) *tang* AMP $=\frac{x}{y}$, e *tang* BMP$=\frac{a-x}{y}$. Dunque (641) $t=\frac{ay}{y^2-ax+x^2}$; il che dà $y^2+x^2-ax-\frac{ay}{t}=0$, equazione al circolo (824). Ne compisco i due quadrati e sarà $(y-\frac{a}{2t})^2+(\frac{1}{2}a-x)^2=\frac{a^2}{4}+\frac{a^2}{4t^2}$; poi divido AB in mezzo nel punto F, dal quale alzo EF$=\frac{a}{2t}$ perpendicolare alla stessa AB, e col centro E e raggio AE$=\sqrt{\left(\frac{a^2}{4}+\frac{a^2}{4t^2}\right)}$ descrivo il circolo AMB, che è il luogo dell' equazione; poichè con-

dotta EQ parallela ad AB, ho EQ$=\frac{1}{2}a-x$, MQ$=y-\frac{a}{2t}$; 183
dunque ec. Or essendo EF $\left(=\frac{a}{2t}\right)$: FA $\left(=\frac{1}{2}a\right)$ :: R$(=1)$: $t=tang$AEF (676), i due angoli AMB ed AEF hanno una stessa tangente t; dunque condotta AT in modo che l'angolo TAB sia eguale all'angolo AMB, la retta AE perpendicolare sopra AT incontrerà EF nel centro del circolo cercato.

827. II. La data retta AB si muova nell'angolo acuto BCA 184
in modo che le sue estremità A e B stiano sempre sui lati dell'angolo dato: cerco la curva descritta da un dato punto M di AB. Condotta PM parallela ad AC, sia CP$=x$, PM$=y$, AM$=m$, BM$=n$, cosACB$=cos$MPB$=c$: avrò BP$=\frac{nx}{m}$, e il triangolo MPB darà (681) $\frac{2cnxy}{m}=y^2-n^2+\frac{n^2x^2}{m^2}$, ovvero $y^2-\frac{2ncxy}{m}+\frac{n^2x^2}{m^2}-n^2=0$, equazione all'ellisse; poiché $\frac{n^2}{m^2}>\frac{n^2c^2}{m^2}$ cioè $1>c$ (824). Faccio $y-\frac{cnx}{m}=u$, e posto senMPB$=s$, si avrà $u^2+\frac{n^2s^2x^2}{m^2}-n^2=0$. Presa dunque CE$=1$, e condotta EF$=\frac{cn}{m}$ parallela ad AC, se si conduce CFQ, si avrà QM$=u$. Sia dunque CF$=f$, CQ$=z$; si avrà $x=\frac{z}{f}$; dunque $u^2=$ .... $\frac{n^2s^2}{m^2f^2}\left(\frac{f^2m^2}{s^2}-z^2\right)$. Quindi i semidiametri conjugati CO e CG saranno respettivamente espressi per $\frac{fm}{s}$ e per n, e poiché si conosce l'angolo GCO, è facile descriver l'ellisse (779.II). Se l'angolo ACB sia retto, l'equazion primitiva diventerà $y^2=\frac{n^2}{m^2}(m^2-x^2)$, e apparterrà a un' ellisse dei semiassi m, n. Quindi dati gli assi potrà descriversi l'ellisse; essendo il maggiore $2a$, il minore $2b$, prendo AM$=a$, MB$=b$ e muovo AB

184 tra i lati d' una squadra ; il punto M descriverà il quarto d'elisse richiesta .

828. III. Data la parabola NAK, trovare il luogo di tutti i punti M tali che le due tangenti NM, KM faccian sempre l'angolo
185 stesso NMK . Condotte MP, KL, NQ normali all'asse AQ, sia $AP=x$, $PM=y$, $NQ=z$, $KL=u$, il parametro della parabola $=p$, $\mathrm{tang}\,NMK=t$, onde $AQ=AT=\frac{z^2}{p}$, $AL=AS=\frac{u^2}{p}$ (748. 755), e attesi i triangoli simili TPM, TQN, ed SPM, SLK, avremo $\frac{2z^2}{p} : z :: \frac{z^2}{p}-x : y$, e anche $\frac{2u^2}{p} : u :: x-\frac{u^2}{p} : y$, e di qui $z=y+\sqrt{(y^2+px)}$, $u=-y+\sqrt{(y^2+px)}$, $u+z=2\sqrt{(y^2+px)}$ ed $uz=px$. Ora $NMK=NTQ+KSL$ (483), e perchè (676) $\mathrm{tang}\,NTQ=\frac{p}{2z}$ e $\mathrm{tang}\,KSL=\frac{p}{2u}$, sarà (641) $=\frac{2p(u+z)}{4uz-p^2}=\frac{4\sqrt{(y^2+px)}}{4x-p}$; e quadrando, $y^2=t^2\left(\left(x-\frac{p}{4}\right)^2-\frac{px}{t^2}\right)$, equazione all' iperbola (824) . Sia $x-\frac{p}{4}-\frac{p}{2t^2}=\Phi$, e verrà $y^2=t^2\left(\Phi^2-\frac{p^2}{4t^4}(t^2+1)\right)$, che paragonata con $y^2=\frac{n^2}{m^2}(x^2-m^2)$ (823) e chiamato s il seno dell'angolo NMK, dà $m=\frac{p}{2t^2}\sqrt{(t^2+1)}=$(637) $\frac{p}{2ts}$ ed $n=\frac{p}{2s}$: onde diminuendo le x di $AC=\frac{p}{4}+\frac{p}{2t^2}$, l' iperbola del cantro C è dei semiassi $CD=m$, $CG=n$, sarà il luogo dell' equazione . E si osservi 1.° che se l' angolo NMK sia ottuso, la tangente t sarà negativa : ma ciò nulla cangia nell' equazione che contiene sole potenze pari di t : onde dei due rami iperbolici MDm, $M'dm'$, quello soddisfa al problema quando il dato angolo è acuto, questo quando è ottuso : 2.° che se il dato angolo è retto, si ha $t=\infty$ (633), onde la linea cercata è la direttrice della stessa parabola (749) : cosicchè due tangenti della parabola che partono da un punto della direttrice, forman sempre un angolo retto .

829. IV. Far passare una Sezione conica per cinque punti dati A, C, D, B, E. Per due di questi punti conduco AB e dagli altri punti le perpendicolari CF, DH, GE sopra di essa, e poi suppongo che l'equazione della sezione conica cercata sia $ay^2+bxy+cx^2+dx+fy+g=0$, e faccio $AF=p$, $FC=q$, $AG=p'$, $GE=q'$ $AH=p''$, $DH=q''$, $AB=p'''$. Quando $x=0$ sarà $y=0$, onde $g=0$, e però l'equazione si riduce ad $ay^2+bxy+cx^2+dx+fy=0$. Quindi secondo che $x=p$, $=p'$, $=p''$, $=p'''$. si ha $y=q$, $=-q'$, $=q''$, $=0$: sicchè si hanno le quattro equazioni, $aq^2+bpq+cp^2+dp+fq=0$ ..... $aq'q'-bp'q'+cp'p'+dp'-fq'=0$ .... $aq''q''+bp''q''+cp''p''+dp''+fq''=0$ ...., $cp'''p'''+dp'''=0$, da cui si avranno i valori di b, c, d, f. che sostituiti in $ay^2+bxy+cx^2+dx+fy=0$, danno l'equazione della curva cercata. Il metodo può applicarsi a risolvere un somigliante problema per le linee del terzo e del quarto grado. 186

830. Così si trova per approssimazione la legge di più quantità legate insieme con certi rapporti. Suppongo per esempio le tre quantità BC, DE, FG dipendenti da tre altre AB, AD, AF; si vuole in generale una legge che unisca queste sei quantità. Immagino l'indefinita AF, e riguardo le sue parti AB, AD, AF come l'ascisse d'una curva CEMG; suppongo che ogni ordinata y sia una funzione indeterminata $A+Bx+Cx^2+$ec. dell'ascissa corrispondente (se le date quantità fossero quattro BC, DE, PM, FG, prenderei quattro termini per esprimere questa funzione). Or giacchè si ha $y=A+Bx+Cx^2$, faccio $AB=a$, $BC=b$, $AD=a'$, $DE=b'$, $AF=a''$, $FG=b''$, onde le tre equazioni $b=A+Ba+Ca^2$... $b'=A+Ba'+Ca'a'$.. $b''=A+Ba''+Ca''a''$, con cui si determinano i coefficienti A, B, C, e l'equazione approssimata della curva CM, ove una quantità AP dipende da un' altra PM, come AB dipende da BC, AD da DE ec. Tale è il *Metodo dell' Interpolazioni*. 187

831. Con questo si ha l'equazione approssimata d'una curva segnata a caso sulla carta. Basta 1.° abbassar delle perpendicolari da varj punti di questa curva (e in particolare da quelli ove cangia molto di concavità) sopra una retta presa per retta dell'ascisse: 2.° supporre che l'equazione della curva sia $y=A+Bx+Cx^2+Dx^3$ ec. in cui si fanno entrar tanti coef-

187 ficienti indeterminati quante son le perpendicolari abbassate: 3.° determinar come sopra i coefficienti A, B, C, D ec.

Problemi determinati fino al quarto grado

832. I luoghi di due equazioni indeterminate del secondo grado posson costruirsi sulla stessa retta dell' ascisse, con la stessa origine e nello stesso angolo delle coordinate. In tal caso le due curve si taglieranno in punti tali che l' ordinate corrispondenti a questi, saranno le radici dell' equazione determinata che si avrebbe riunendo le due equazioni in una, che non contenesse altro che x o y. Reciprocamente se un'equazione determinata del terzo o quarto grado si divida in due che contengano x ed y, cosicchè eliminando x o y si ritrovi la data, è chiaro che costruendole come sopra, i punti d' intersezione delle due curve avranno per coordinate i valori dell' incognita: così se nell' equazione $x^4+ax^3+bx^2+cx+d=o$ si faccia $x^2=py$, sarà $p^2y^2+apxy+bpy+cx+d=o$, equazione a una sezione conica che costruita con la parabola dell'equazione $x^2=py$, taglierà questa curva in dei punti, le cui ascisse corrispondenti saranno i valori di x. Quando la data equazione ha quattro radici reali, le due curve si tagliano in quattro punti; quando ne ha due sole, si tagliano in due; se tutte sono immaginarie, non si ha intersezione; con radici eguali, le curve si toccano; e perchè s' incontrino in un numero di punti eguale a quello delle radici reali ed ineguali, si prende l'equazione d'una delle due curve con y alla sola prima dimensione. Del resto, il metodo, sì bello in teorica, è stato in pratica quasi abbandonato per l'impossibilità di descrivere esattamente le Curve.

833. I. Date due rette a, b, trovar tra esse due medie proporzionali x, y. Poichè per ipotesi $\div a : x : y : b$, sarà $x^2=ay$ ed $y^2=bx$; onde costruite le parabole di queste equazioni con la stessa retta dell' ascisse, lo stesso vertice e lo stesso angolo delle coordinate (che ordinariamente si suppone retto), esse daranno con le loro intersezioni i valori cercati di x, y. Ma in generale non si costruisce un'equazione del terzo o quarto grado senza far uso del circolo, curva tanto più comoda a descriversi. Che se per introdurre il circolo nelle soluzioni di questo

genere, occorre talvolta una certa destrezza, vi sono anche dei casi, in cui si presenta da se. Per esempio, sommando le due equazioni $x^2-ay=o$, $y^2-bx=o$, e supposte le coordinate in angolo retto, nasce l'equazione al circolo $x^2+y^2-ay-bx=o$. Descritta dunque una parabola AM del parametro b sull' asse AP, essa sarà il luogo dell' equazione $y^2=bx$. Per trovar quello di $x^2+y^2-ay-bx=o$, sia $x-\frac{1}{2}b=u$, e $y-\frac{1}{2}a=z$: avremo $u^2+z^2=\frac{1}{4}(a^2+b^2)$, e condotta da A perpendicolarmente ad AP la retta $AB=\frac{1}{2}a$, e per B l'indefinita BCQ parallela ad AP, se preso $CB=\frac{1}{2}b$ si descriva un circolo col raggio CA, esso taglierà la parabola in un punto M tale che condotta la perpendicolare PM, le coordinate AP, PM saranno le due medie proporzionali cercate. 188

Supposto $b=2a$, il cubo di AP sarebbe doppio del cubo a^3, ciò che risolve con poco il problema della duplicazione del cubo, sì famoso tra gli Antichi. Anzi può generalizzarsi il problema prendendo $b=\frac{ma}{n}$ per trovare un cubo $AP^3=\frac{ma^3}{n}$ che sia ad un dato cubo a^3 nella ragione $m:n$.

834. II. Dividere in tre parti eguali un arco di circolo BF.

Suppongo MF il terzo dell'arco BF e oltre le normali BOG, MPm sul raggio AF, conduco Bm ed mR normale a BG. 189
Poi fatto $AP=x$, $PM=y$, $AM=a$, $AO=b$, $BO=c$, i triangoli simili AMP, BmR daranno $x:y::c+y:x-b$, cioè $y^2-x^2+cy+bx=o$, equazione all' iperbola equilatera (824), che costruendosi determinerà il punto M nel quale il circolo e l'iperbola si taglieranno. Ora essa può mettersi sotto questa forma $(y+\frac{1}{2}c)^2-(x-\frac{1}{2}b)^2=\frac{1}{4}c^2-\frac{1}{4}b^2$; dunque (823) se $c>b$, l' equazione apparterrà al second' asse, e se $c<b$, al primo. In quest' ultima supposizione, dal centro A si conduca $AD=\frac{1}{2}c$ normale ad AF, e da D si tiri $DC=\frac{1}{2}b$ parallela ad AO; il punto C sarà il centro dell'iperbola, e se si prenda $CL=CK=\frac{1}{2}\sqrt{(b^2-c^2)}$, e si descriva sull' asse LK un' iperbola KM, essa taglierà il circolo nel punto cercato M. L' iperbola opposta M'LM'' taglia il circolo in due punti M' ed M'', il primo dei quali dà (662) l'arco F'M' terza parte di F'M'B, ed il secondo determina l' arco F'M'' terza parte di

F'M''GFB; il punto G non dà soluzione: ma la radice GO=
189 $-c$ è quella per cui può dividersi l'equazione $4y^4+4cy^3-3a^2y^2-2a^2cy+a^2c^2=0$, che risulta dai due luoghi $y^2-a^2+x^2=0$, $y^2-x^2+cy+bx=0$.

Questi luoghi sommati danno $y^2+\frac{1}{2}bx+\frac{1}{2}cy=\frac{1}{2}a^2$,
190 equazione alla parabola. Perciò condotta dal punto A parallelamente a BG la retta AD$=\frac{1}{4}c$, si conduca DC$=\frac{\frac{1}{8}c^2+a^2}{b}$ parallela ad AF, e si descriva col vertice C e asse CD una parabola del parametro $\frac{1}{2}b$; essa taglierà il circolo ne' punti cercati M, M', M''. Posson variarsi queste soluzioni in molte maniere, moltiplicando le due equazioni del problema per delle quantità indeterminate, e sommandone o sottraendone i prodotti: il che conduce a delle sezioni coniche differenti, tutte egualmente proprie a risolvere il problema. Così per risolverlo coll'ellisse, basterà moltiplicar l'equazione $y^2+x^2-a^2=0$, per l'indeterminata m, e aggiungerne il prodotto alla seconda equazione; si avrà $y^2+\frac{(m-1)x^2+bx+cy-a^2m}{m+1}=0$, che appartiene all'ellisse quando $m>1$, ed all'iperbola quando $m<1$. Si può inoltre determinare m con una condizione arbitraria; per esempio, se si volesse che gli assi dell'ellisse fossero tra loro in ragione di $p:q$, dovrebbe essere $\frac{m-1}{m+1}=\frac{p^2}{q^2}$, il che dà $m=\frac{q^2+p^2}{q^2-p^2}$.

835. III. Dividere lo spazio parabolico ACB con una retta CM in due settori eguali ACM, BCM. Condotta MP normale
191 ad AC, sia AP$=x$, PM$=y$, AC$=a$, BC$=b$, il parametro della parabola $=p$; avremo, come ben presto si vedrà, $\frac{2}{3}xy+\frac{1}{2}y(a-x)=ACM=\frac{1}{2}$ ACB$=\frac{1}{3}ab$, ovvero $xy+3ay=2ab$, equazione all'iperbola tra gli asintoti. Prolungata AP verso F, onde sia AF$=3$AC, e condotta FK perpendicolare ad FA, tra gli asintoti FK, FA si descriva una iperbola equilatera della potenza $2ab$; essa sarà il luogo dell'equazione $xy+3ay=2ab$ e taglierà la parabola nel punto richiesto M.

Volendosi servir del circolo, poichè $b^2=ap$ ed $y^2=$

px, sarà $x = \frac{y^2}{p} = \frac{ay^2}{b^2}$, valore che sostituito nell'equazione 191
$xy+3ay=2ab$, la cangerà in $y^3+3b^2y-2b^3=0$: la moltiplico per y e diviene $y^4+3b^2y^2-2b^3y=0$, da cui, sostituito $\frac{b^2x}{a}$ ad y^2, ricavo $x^2+3ax-\frac{2a^2}{b}y=0$: a questa aggiungo $y^2-px=0$, ed ho $y^2+x^2+(3a-p)x-\frac{2a^2y}{b}=0$, equazione al circolo. Alzata dal punto A normalmente ad AP una retta $AD=\frac{a^2}{b}$, si conduca ad AD dalla parte opposta al punto M una perpendicolare $DC'=\frac{1}{2}(3a-p)$ (qui si suppone $3a>p$), e col raggio C'A e centro C' si descriva un arco di circolo; quest'arco taglierà la parabola nel punto richiesto M; e $PM= b\left(\sqrt[3]{(1+\sqrt{2})}-\sqrt[3]{(-1+\sqrt{2})}\right)$.

836. IV. Trovar le radici dell' equazione del quarto grado $x^4-p^2x^2+p^2qx+p^3r=0$ per mezzo d' un circolo e d'una parabola. Fatto al solito $x^2=py$, viene $y^2+qx-py+pr=0$; 192
vi unisco $x^2-py=0$ e nasce l' equazione al circolo $x^2+y^2-2py+qx+pr=0$. Descritta dunque col parametro p la parabola M'AM''' che abbia AQ per asse perpendicolare ad AP, e presa $AD=p$, $DC=\frac{1}{2}q$ normale ad AD dalla parte in cui è nella figura (si prenderebbe dall' altra se fosse negativo), si troverà che un circolo del centro C e raggio $\sqrt{(CA^2-pr)}$ taglierà la parabola nei punti M, M', M'', M''', che determineranno le radici dell' equazione, due positive, cioè MQ, M'Q', l' altre negative. Se l' equazione da costruirsi fosse $x^4+p^2x^2-p^2qx+p^3r=0$, presa al solito $x^2=py$, si avrebbe $y^2+x^2-qx+pr=0$, equazione al circolo come nel caso passato, ma più facile a costruirsi.

Si cerchino ora le radici dell' equazione $x^4-pqx^2+p^2rx+p^2m^2=0$ per mezzo di un circolo e d' un' iperbola tra gli asintoti. Presa $xy=pm$, viene $x^4-pqx^2+p^2rx+x^2y^2=0=x^2+y^2-pq+\frac{p^2r}{x}=x^2+y^2-pq+\frac{pry}{m}$, equazione al circolo. Tra gli asintoti perpendicolari QAQ', P'''AP' descritte l' iperbole equilatere della potenza pm, prendo sotto AP la

192 retta $AC=\frac{pr}{2m}$, e il circolo del centro C, col raggio $\sqrt{(AC^2+pq)}$, taglierà l' iperbole opposte nei quattro punti M, M', M'', M''', i quali determineranno come sopra i quattro valori di x con le ascisse AP, AP', AP'', AP'''.

837. Per ulteriore esercizio ed istruzione dei principianti aggiungiamo, secondo il consueto, alcuni problemi relativi ai luoghi geometrici, principali fondamenti di tutte l'esposte dottrine.

I. Fra i lati AC, CB dell' angolo qualunque ACB sia condotta
193 comunque e dovunque l'obliqua FD; trovare il luogo geometrico dei punti M tali, che condotta da F la FM, e per M la GP parallela ad FD si abbia FM=GP.

Pongasi $CP=x$, $PM=y$, $FD=b$, $FC=a$, $cos DFC=c$. Avremo $FM^2=(668)\,y^2+(x-a)^2-2cy(x-a)=GP^2=\frac{b^2x^2}{a^2}$: d'onde si dedurrà (824) che il luogo cercato è un'ellisse se fatto $sen DFC=s$, sia $as>b$, un'iperbola se $as<b$, una parabola se $as=b$.

II. Abbiasi la semicirconferenza AGQ inclinata ad un angolo qua-
194 lunque θ sopra il piano AQRS, e da ogni punto della medesima sia calata sul piano una normale. Determinar la curva che le normali descriveranno sul piano.

Condotte PG, PM normalmente al diametro AQ intersezione comune della circonferenza e del piano, fatta $AP=x$, $PM=y$ e supposto 1 il raggio della data circonferenza, il triangolo GPM rettangolo in M, e in cui l' angolo $GPM=\theta$ (589), darà $y^2=cos\,\theta\times PG^2=(556)\,cos\,\theta\,(2x-x^2)$, equazione all' ellisse (824. II.).

195 III. Sulle rette ad angolo AB, BC sieno prese le porzioni qualunque AP, BE nel rapporto fra loro di $1:m$. Si unisca quindi A con E, e da P si conduca parellelamente a BC la PM che incontri in M la retta AE. Si cerca il luogo del punto M.

Fatta $AP=x$, $PM=y$, $AB=a$, avremo $x:y::a:BE::a:mx$. Dunque $x^2=\frac{ay}{m}$ equazione alla parabola (824 I.); onde per descriver con facilità questa curva, basterà 1.° dividere AB nelle parti eguali AP, PP', P'P'', ec.; 2.° prender sopra BC le porzioni eguali BE, EE', E'E'' ec: 3.° unire A con E, E', E'' ec. infine condurre da P, P', P'' ec. parallelamente a BC le rette PM, P'M', P''M'' ec. la prima fino ad AE, la seconda fino ad AE' ec. La

curva fatta passare per A, M, M', M'' ec. sarà manifestamente 195
parabolica, AD parallela a BC ne sarà un diametro, $\frac{a}{m}$ il parametro corrispondente; quanto poi al vertice, all' asse e al fuoco si troveranno col metodo già insegnato (762 II.$^{\circ}$).

IV. Divisi in m parti eguali i lati AB, AC dell' angolo qualun- 196
que BAC, si suppongano contrassegnate le divisioni dell' uno e dell' altro coi numeri ordinali 1, 2, 3 ec., in modo però che in uno dei lati la numerazione proceda dal vertice verso l' estremità del lato, e nell' altro proceda oppostamente dall' estremità verso il vertice, come si vede praticato nella figura. Prese quindi sul lato AB, due divisioni contigue E, D e condotte da queste le rette DF, EG alle divisioni, che nell' altro lato son respettivamente contrassegnate col numero stesso, si cerca il luogo geometrico della loro intersezione M.

Sia z il numero delle divisioni contenute in AF, saranno egualmente z quelle contenute in BD, e perciò $m-z$ ne saran comprese in AD, $m-z-1$ in AE, e $z+1$ in AG. Fatti dunque AB$=a$, AC$=1$, avremo AD$=\frac{a}{m}(m-z)$, AE$=\frac{a}{m}(m-z-1)$, AF$=\frac{z}{m}$, AG$=\frac{z+1}{m}$. Posto ciò si conduca da M la PM parallela ad AC, e si ponga AP$=x$, PM$=y$: i triangoli simili ADF, PDM, AGE, PME daranno AF:PM::AD:PD, AG:PM::AE:PE; d' onde AF:AF$-$PM::AD:AD$-$PD, AG:AG$-$PM::AE:AE$-$PE; cioè introducendo i valori stabiliti, e osservando che AD$-$PD$=x=$AE$-$PE, $z:z-my::a(m-z):mx$, $z+1:z+1-my::a(m-z-1):mx$. Fatto $m\left(\frac{x}{a}-1-y\right)=\omega$, le due proporzioni daranno 1.^{a} $z^2+\omega z+m^2y=0$, 2.^{a} $(z+1)^2+\omega(z+1)+m^2y=0$, dalle quali sottratte si ha $z=-\frac{1}{2}(\omega+1)$. Introdotto questo valore nella prima, e riducendo troveremo $\omega^2=4m^2y+1$, equazione alla parabola (824 I.). Il metodo di così descriver questa curva è assai conosciuto fra i pratici, se non che l' angolo ABC suol da loro prendersi retto, il che non è necessario, ma comodo per la più pronta determinazione dell' asse.

V. Supposta AB perpendicolare al piano MPB, e condotte sul 197
piano per B la retta PB, e da qualunque punto P di PB la PM normale a PB, determinare sopra PM un tal punto M, che unito

197 A' con M e con P, l'angolo MAP sia eguale ad un angolo dato Φ.

Fatta AB$=a$, BP$=x$, PM$=y$, i triangoli ABP rettangolo in B (582) ed MPA rettangolo in P (592) daranno $x^2=y^2 cot^2\Phi-a^2$, equazione all' iperbola (824 III.°).

198 VI. Sull'asse AP di una sezione conica, o sul di lui prolungamento AO, sia preso un punto qualunque O, e condotta da O la OQ a qualsivoglia punto Q della curva, si faccia passar per Q la PM normale all' asse. Determinare sopra PM il punto M tale che si abbia PM$=$OQ.

Fatta AO$=m$, OP$=x$, PM$=y$, AP$=z=x\pm m$, si troverà $y^2=OQ^2=x^2+PQ^2=(z\mp m)^2+PQ^2$; quindi per la parabola, ove $PQ^2=pz$, avremo $y^2=z^2+z(p\mp 2m)+m^2$ equazione all'iperbola; per l' ellisse, ove $PQ^2=\frac{b^2}{a^2}(2az-z^2)$, avremo $y^2=\frac{z^2}{a^2}(a^2-b^2)+2z\left(\frac{b^2}{a}\mp m\right)+m^2$, e quindi un' iperbola se l' asse AP é il maggiore, un' ellisse se è il minore, ed una parabola se $a=b$, cioé se l' ellisse si cangi in un circolo. Infine per l' iperbola, ove $PQ^2=\frac{b^2}{a^2}(2az+z^2)$, avremo $y^2=\frac{z^2}{a^2}(a^2+b^2)+2z\left(\frac{b^2}{a}\mp m\right)+m^2$, il che darà in ogni caso un' iperbola.

METODO DELLE PROJEZIONI

838. Il metodo, col quale abbiamo fin qui determinata l'equazione di una curva, o la curva corrispondente ad una data equazione, suppon la curva situata in un piano medesimo con le sue coordinate. Vediamo adesso in qual guisa debba operarsi nel caso che le coordinate sieno fuori del piano della curva, o che come suol dirsi, la curva sia situata nello spazio. Oltre non pochi e sommi vantaggi inerenti, come vedremo, a questa nuova considerazione, essa verrà a farci strada a stabilir l' equazioni della superficie dei solidi, che in modo diverso non sarebbe possibile d' ottenere. Rammentiamo che scopo principale dell'equazioni di una curva o di una superficie si è di condurre a ritrovare e segnare tutti i punti che loro appartengono, e fissarne la posizione rapporto ad un punto noto(725). Tutte quelle espressioni analitiche che soddisfa-

ranno a questa condizione, dovranno dunque riguardarsi come l'equazioni richieste.

839. Già avvertimmo (729) che col mezzo di tre coordinate x, y, z parallele a tre assi concorrenti ad angolo retto in un punto noto A, i quali denoteremo con X, Y, Z, si determina rapporto ad A la posizione di un qualunque altro punto B, comunque situato nello spazio: cosicchè se m, p, q sieno i valori noti di queste tre coordinate, $x=m$, $y=p$, $z=q$ saranno tre equazioni, che prese insieme stabiliranno la posizione di B, e potranno perciò riguardarsi come l'equazioni del punto B. 199

840. Rimane adesso da osservare: 1.° che considerati come positivi i tre assi, debbon considerarsi come negativi i loro prolungamenti al di là del punto di concorso (109); e perciò anche le coordinate x, y, z o i loro valori m, p, q dovranno assumersi per negativi allorchè il punto dato si troverà non dalla parte degli assi, ma da quella dei loro prolungamenti. Che se questo punto sia per rispetto ad un asse dalla parte positiva, e per rispetto ad un altro dalla parte negativa o del prolungamento, in tal caso risulterà positiva la coordinata corrispondente al primo asse, negativa quella corrispondente al secondo. Generalmente noi supporremo il punto situato dalla parte positiva degli assi, e riguarderemo perciò come positive tutte le sue coordinate.

2.° Le coordinate x, y, z o i loro valori m, p, q equivalgono alle respettive distanze del punto dato ai tre piani. Quindi se il punto cada sopra uno dei piani, per esempio su quello delle x, z, sarà nulla la distanza p, e la seconda equazione diverrà $y=0$. Se cada sopra uno degli assi, come per esempio su quello delle x, siccome in tal caso si trova insieme e sul piano delle x, y e su quello delle x, z, saranno nulle nel tempo stesso le due distanze p, q e l'ultime dite equazioni diverranno perciò $y=0$, $z=0$. Se infine coincidesse col punto di concorso degli assi, trovandosi allora in ciascuno dei tre piani, saranno nulle tutte le tre distanze, ed avremo per equazioni $x=0$, $y=0$, $z=0$.

3.° Inoltre si concepiscano tre nuovi piani paralleli ai tre primi, e tutti situati o dentro o fuori dell'angolo da questi formato, e sieno α, β, $\varkappa$ le distanze degli uni agli altri: saranno $x-\alpha$, $y-\beta$, $z-\varkappa$ quelle del punto B ai nuovi

199 tre piani, o le sue coordinate riferite al punto del loro concorso, nel caso che questi sieno contenuti nell' angolo fatto dai primi; e diverranno $x+\alpha$, $y+\beta$, $z+\varkappa$ nel caso che i primi sieno contenuti nell' angolo dei secondi.

841. Che se con x, y, z vogliansi piuttosto rappresentare le coordinate di B riferite al nuovo sistema di piani, quelle riferite al primo si cangeranno allora in $x+\alpha$, $y+\beta$, $z+\varkappa$, nel primo caso, e in $x-\alpha$, $y-\beta$, $z-\varkappa$ nel secondo. Qualora poi alcuni dei nuovi piani fossero situati al di fuori, altri al di dentro dell' angolo fatto dai primi, dovranno considerarsi come negative, e quindi cambiarsi di segno quelle delle quantità α, β, $\varkappa$ che han rapporto con i piani situati al di dentro, e lasciarsi col loro segno le rimanenti. Tutto ciò è chiaro, e già ne demmo altrove un accenno (730). Resta infine a osservarsi che in ognuno dei precedenti supposti, le quantità α, β, $\varkappa$ equivalgon sempre alle coordinate di uno dei due punti d' origine riferito all' altro.

842. Si supponga adesso che tre nuovi assi X′, Y′, Z′ inclinati ad angoli noti sugli assi X, Y, Z concorrano con questi in uno stesso punto A, e date le solite coordinate x, y, z che riferiscono ai secondi il punto B, si vogliano le coordinate x', y', z' che lo riferiscono ai primi. Per chiarezza maggiore si rappresentino con $(x'x)$, $(x'y)$, $(x'z)$ gli angoli che il nuovo asse X′ fa con gli assi X, Y, Z: saranno $90°-(x'x)$, $90°-(x'y)$, $90-(x'z)$ gli angoli di questi tre assi con il piano delle y', z'. Or s' immagini che per la sommità della coordinata z, ossia per il punto B, per la sommità della coordinata y, o per il punto della projezione di B sul piano delle x, y (729), e per l' estremità della coordinata x o per quel punto dell' asse X, ove ha origine y, sieno condotti tre piani indefiniti p, p', p'' paralleli fra loro ed al piano delle y', z', e per conseguenza normali all' asse X′. E′ manifesto 1.° che la distanza del piano p all' origine A verrà determinata dalla porzione dell' asse X′, intercetta fra l' origine e il piano (583 2.°); 2.° che questa porzione equivarrà alla coordinata x' del punto B; 3.° che l' angolo di p con z sarà $90°-(x'z)$, cioè quello stesso che il piano delle y', z' parallelo a p fa con l' asse Z parallelo a z; 4.° che per la stessa ragione saranno $90°-(x'y)$, $90°-(x'x)$ gli angoli respettivi dei piani p', p'' con le coordinate y, x; 5.° che perciò le distanze di p a p', di p''

a p'', e di p'' all' origine A saranno $z\,cos(x'z)$, $y\,cos(x'y)$, 199
$x\,cos\,(x'x)$ (674). Ma è visibile che la somma di queste tre distanze equivale alla distanza totale del piano p all' origine A, ossia alla cuordinata x', avremo dunque $x'=x\,cos(x'x)+y\,cos\,(x'y)+z\,cos\,(x'z)$. Medesimamente se si rappresentino con $(y'x)$, $(y'y)$, $(y'z)$ gli angoli dell' asse Y' con gli assi X, Y, Z; e con $(z'x)$, $(z'y)$, $(z'z)$ quelli degli stessi assi con l' asse Z', otterremo $y'=x\,cos\,(y'x)+y\,cos\,(y'y)+z\,cos(y'z)$, e $z'=x\,cos\,(z'x)+y\,cos\,(z'y)+z\,cos\,(z'z)$.

843. Questa trasformazione dell' uno nell' altro sistema di coordinate, data per mezzo degli angoli fatti dagli assi fra loro, non è sempre la più opportuna. Giova, nell' Astronomia specialmente, piuttosto averla per mezzo delle inclinazioni dei piani, e per gli anguli che le loro intersezioni fanno con gli assi.
A tale effetto si osservi che se col centro in A, comun concorso 200
di tutti gli assi, s' immagini descritta una sfera di raggio qualunque, i piani delle coordinate si cangeranno in piani di circoli massimi (693), le loro inclinazioni in angoli sferici (697), le luro intersezioni e i loro assi in raggi. Sia dunque SPYZ la sfera, e i raggi AX, AY, AX', AY' rappresentino gli assi X, Y, X', Y'. Descritti gli archi X'X, Y'X, X'Y, Y'Y, YX, Y'X', prolungati i due ultimi fino al luro incontro in P, e condotto il raggio AP, è manifesto 1.° che l' arco X'X misura ed eguaglia l' angolo al centro XAX', fatto dagli assi X'X e che abbiamo rappresentato con $(x'x)$ (842), onde si ha $X'X=(x'x)$; come per la stessa ragione si avrà $Y'X=(y'x)$, $X'Y=(x'y)$, $Y'Y=(y'y)$. 2.° Che gli archi YX, Y'X' contenendo l' angolo degli assi Y, X ed Y', X' saranno ambedue di 90°. 3.° Che i settori PAX, PAX' essendo nei piani degli assi Y, X, ed Y'X', il raggio AP rappresenterà l' intersezione di questi piani, e l' angolo P la loro inclinazione. Si chiami frattanto θ quest' inclinazione, e ψ, ϕ gli angoli che gli assi X, X' fanno con l' intersezione AP: avremo $P=\theta$, $PX=\psi$, $PX'=\phi$, $PY=\psi-90°$, $PY'=\phi-90°$; e i quattro triangoli PXX', PXY', PYX', PYY' daranno (709. II.)

I.ª $cos\,(x'x)=\ \ cos\,\theta\,sen\,\psi\,sen\,\phi+cos\,\psi\,cos\,\phi$
II.ª $cos\,(y'x)=-cos\,\theta\,sen\,\psi\,cos\,\phi+cos\,\psi\,sen\,\phi$
III.ª $cos\,(x'y)=-cos\,\theta\,cos\,\psi\,sen\,\phi+sen\,\psi\,cos\,\phi$
IV.ª $cos\,(y'y)=\ \ cos\,\theta\,cos\,\psi\,cos\,\phi+sen\,\psi\,sen\,\phi$

Si rappresentino adesso coi raggi AZ, AZ' gli assi Z, Z' e si

200 conducano gli archi X′Z, Y′Z, XZ′, YZ′, PZ, PZ′. Sarà qui pure evidente che $X'Z=(x'z)$, $Y'Z=(y'z)$, $Z'X=(z'x)$, $Z'Y=(z'y)$. Inoltre dovendo gli assi Z, Z′ esser normali l' uno al piano XAY, l' altro al piano X′AY′, e quindi alla loro intersezione AP (593), si avrà $PZ=90°=PZ'$, $YPZ=90°=Y'PZ'$ e perciò $Y'PZ=90-\theta$, $YPZ'=90°+\theta$. Quindi ritenuti gli altri precedenti valori, i quattro triangoli X′PZ, Y′PZ, XPZ′, YPZ′ daranno V.ª $cos(x'z)=-sen\,\theta\,sen\,\phi$; VI.ª $cos(y'z)=sen\,\theta\,cos\,\phi$; VII.ª $cos(z'x)=-sen\,\theta\,sen\,\psi$; VIII.ª $cos(z'y)=sen\,\theta\,cos\,\psi$.

Infine l' angolo degli assi Z, Z′ essendo eguale a quello dei loro circoli massimi (695), avremo IX.ª $cos(z'z)=cos\,\theta$. Or sostituendo questi nove valori nelle formule precedenti, si otterranno espresse nel modo che si cercava le nuove coordinate x', y', z' del dato punto B, o le sue nuove equazioni.

844. Ma abbiasi non più un punto, ma una retta indefinita AB
199 con l'origine in A, della quale si vogliano l'equazioni. Fatti concorrere in A i tre assi AX, AY, AZ, s'immagini che sul piano di due di essi, per esempio sul piano XAY delle x, y scenda per AB un piano normale, a cui daremo il nome di *piano projettante*, e sia AD l' intersezione di esso col piano XAY. Se da un punto qualunque B di AB si conduca la BD normale ad AD, e quindi da D la DE normale ad AX, saranno AE, DE, BD le tre coordinate x, y, z del punto B. Chiamati frattanto ω. θ gli angoli EAD, DAB fatti dalla projezione AD con l' asse AX delle X, e con la retta proposta AB, i triangoli ABD, DAE daranno le due equazioni 1.ª $y=x\,tang\,\omega$, 2.ª $z=x\,sec\,\omega\,tang\,\theta$. Or la prima spetta visibilmente alla projezione AD (821), e, dato ω, stabilisce la posizione del piano projettante, che dovendo sorger normalmente al piano nella direzione di AD é obbligatamente determinato, quando è determinata AD. La seconda, dati ω e θ, fissa sul piano projettante la posizione di AB; ed é dunque chiaro che ambedue prese insieme determinano la situazione della retta data, e ne son perciò l' equazioni.

845. Se in luogo di sceglier per piano della projezione il piano delle x, y si fosser prescelti quelli o delle x, z o delle y, z, chiamati ω', ω'' gli angoli fatti dalle due nuove projezioni nel primo caso con l' asse delle z, nel secondo con quello delle y, e θ', θ'' quelli fatti con la retta data, avremmo avuto nell' un dei casi $x=z\,tang\,\omega'$, $y=z\,sec\,\omega'tang\,\theta'$, e nell' altro

$z=y$ *tang* ω'', $x=y$ *sec* ω''*tang* β'') due nuovi sistemi d' equazioni atti a rappresentare del pari che il precedente la retta data. 199
Ma qui possiamo osservare di più che le prime equazioni di ciascuno dei tre predetti sistemi, cioè $y=x$ *tang* ω, $x=z$ *tang* ω', $z=y$ *tang* ω'' spettando alla projezione di AB sopra ciascuno dei respettivi tre piani (844), determinano con queste projezioni anche le posizioni dei tre piani projettanti, che tutti s' intersecano in AB. Quindi due qualunque di esse determinano AB; essendo chiaro che supposti dati di posizione due piani, deve intendersi data anche la loro intersezione comune. Perciò combinando insieme a due per due le riferite equazioni, potremo ottener tre altri sistemi, i quali comecchè più semplici dei tre precedenti, saranno anzi quelli di cui faremo più uso.

846. Attenendoci dunque a questi, si supponga per maggior generalità che l' origine delle coordinate passi da A in un altro qualunque punto fuori della retta AB. Esprimendo con α, β, κ le coordinate del punto A riferite a questa nuova origine, le antiche coordinate del punto qualunque B, che abbiamo di sopra rappresentate con x, y, z si cangeranno in $x-\alpha$, $y-\beta$, $z-\kappa$ (841), valori che introdotti nelle equazioni, daranno $y=(x-\alpha)$ *tang* $\omega+\beta$, $x=(z-\kappa)$ *tang* $\omega'+\alpha$, $z=(y-\beta)$ *tang* $\omega''+\kappa$. Or qui si osserverà 1.° che se la retta sia parallela al piano delle x, y la sua projezione sul piano delle y, z risulterà parallela all' asse delle y; d' onde $\omega''=0$, e quindi per una delle equazioni $z=\kappa$. Che se di più la retta coincida col piano, nel qual caso $\kappa=0$ (840 2.°), la predetta equazione diverrà $z=0$. Nel modo stesso se sia parallela al piano delle x, z, la sua projezione su quello delle x, y sarà parallela all' asse delle x, il che darà $\omega=0$, e quindi $y=\beta$, e di più $y=0$ qualora la retta sia sul detto piano. Come pure si troverà $x=\alpha$, $x=0$, quando la retta o sia parallela al piano delle y, z, o sia con esso coincidente. Quindi 2.° se la retta sia parallela ad uno degli assi, o normale ad uno dei piani, e per conseguenza parallela agli altri due, avremo per equazioni $x=\alpha$, $y=\beta$ nel caso che l' asse parallelo sia Z, $x=\alpha$, $z=\kappa$ nel caso che sia Y, $y=\beta$, $z=\kappa$ nel caso che sia X. 3.° Se il punto A della retta sia sopra uno qualunque degli assi, per esempio sull' asse Z, le distanze α, β di questo punto dagli altri due piani (840. 2.°)

199 saranno nulle, e allora le tre equazioni si ridurranno ad $y=x \tang \omega$, $x=(z-\varkappa) \tang \omega'$, $z=y \tang \omega''+\varkappa$.

847. Si chiamino ϕ, ϕ', ϕ'' gli angoli che le diverse projezioni nei piani delle x, y, delle x, z, delle y, z fanno con gli assi delle y, delle x, delle z. Sarà $\phi=90^\circ-\omega$, $\phi'=90^\circ-\omega'$, $\phi''=90^\circ-\omega''$, e quindi $\omega=90^\circ-\phi$, $\omega'=90^\circ-\phi'$, $\omega''=90^\circ-\phi''$, valori che introdotti nelle precedenti equazioni, daranno $x=(y-\beta) \tang \phi+\alpha$, $z=(x-\alpha) \tang \phi'+\varkappa$, $y=(z-\varkappa) \tang \phi''+\beta$. E come queste nuove equazioni non sono che le primitive sotto diverse forme, perciò anche due qualunque di esse combinate fra loro, o una qualunque di queste combinata con una qualunque delle prime (escluse l'identiche, ossia quelle fra le medesime coordinate) daranno luogo ad altrettanti sistemi d'equazioni, tutti in un modo medesimo atti a rappresentar la retta proposta.

848. Concluderemo perciò in generale, 1.° che una retta AB é determinata da un sistema di due equazioni di primo grado, della forma $x=az+b$, $y=a'z+b'$, o dell'altra $x=az+b$, $x=a'y+b'$, ciascuna delle quali è fra due coordinate, l' una comune ad ambedue, l' altra in ambedue differente ; 2.° che ognuna di esse rappresenta separatamente la projezione della retta data sopra uno dei piani ortogonali ; 3.° che questo piano è determinato dalle due coordinate che sono in equazione fra loro; 4.° I coefficienti a, a' equivalgono alle tangenti degli angoli fatti dalla projezione con l' asse corrispondente alla coordinata che ciascun di essi accompagna. Dipendon dunque soltanto dalla direzione della retta, e perciò 5.° sono eguali per tutte le rette parallele, o per la stessa retta allorchè passa da una in un' altra posizion parallela; 6.° son poi sempre nulli allorché la retta è parallela o normale ad uno qualunque dei piani, nel qual caso, come abbiam veduto (846 2.°), la coordinata del secondo membro svanisce, e l' equazioni divengon determinate. Infine 7.° debbon considerarsi per noti, allorché la direzione della retta sia data, per incogniti quando la direzione si cerca.

849. Quanto alle costanti b, b' è chiaro 1.° che dipendono insieme e dalla posizione e dalla direzione della retta, poiché nella parte delle equazioni dalle medesime rappresentata, entrano non solo gli angoli della projezione con gli assi o coi piani, ma ancor la distanza di questi ad un punto della retta (846).

É poi evidente che son sempre nulle quando la retta passa per l' origine delle coordinate, il che non solo si rileva dalla natura 199
delle equazioni che trovammo per questo caso (845), ma anche dall' osservare che allora con $x=0$ deve aversi insieme $y=0$, $z=0$(840 2.°).2.°Che se la retta passi semplicemente per uno degli assi, come avviene appunto quando coincide con uno dei piani, allora è nulla quella delle due costanti, che appartiene all' equazione, le cui ordinate corrispondono agli altri due assi. Così se l' asse di cui si parla è quello delle z, sarà nulla b' nell' ultima equazione del secondo sistema, dovendo in tal caso aversi $y=0$ con $x=0$. 3.° Generalmente i valori di b,b' equivalgono, come é chiaro, a quello che la coordinata del primo membro di ogni equazione ha nel punto, ove la coordinata del secondo si annulla, vale a dire in quel punto ove la retta proposta incontra il piano formato dalla coordinata del primo membro, e da quella che manca nell' equazione. 4.° Infine debbon questi valori assumersi come noti, quando la retta sia data di posizione, come incogniti allorché la posizion della retta si cerca.

850. Del resto il metodo già dichiarato (845), col quale possiamo determinare la posizione di una retta per mezzo di due sue projezioni o delle loro equazioni, é visibilmente applicabile al perimetro di qualunque poligono, come pure alle curve, sussistendo evidentemente anche per questi due casi lo stesso principio sul quale noi lo fondammo (*ivi*).Stabiliremo perciò che *i perimetri dei poligoni e delle curve hanno per equazioni quelle di due qualunque delle loro projezioni*. Deve escludersi il caso che il piano della curva sia parallelo ad uno di quelli di projezione; poichè le projezioni sugli altri due piani degenerando allora in linee rette, le loro equazioni non sarebbero altrimenti idonee a specificar la qualità della curva, e potrebbe soltanto dedursene la situazione rapporto al piano parallelo. In tal caso dovrà farsi uso di una di queste, e di quella della projezione sul piano parallelo.

851. Le superficie costituite dalle normali che dalla curva scendon sui piani di projezione si chiamano *superficie projettanti cilindriche*, attesa la loro analogia col cilindro, sia per parte della forma prismatica,sia per quella della base curvilinea,benchè non circolare. E come le normali costituenti queste superficie terminano in ciascuna di esse alla curva data, così la curva

dovendo trovarsi in ambedue sarà dunque rappresentata dalla loro intersezione comune.

852. Non sempre però l' intersezione di due superficie cilindriche porta ad una curva *piana*, cioè situata tutta in un piano, quali sono state tutte quelle che abbiamo fino adesso considerate. Il più delle volte dà luogo ad una curva che è tale in due sensi, i cui punti son successivamente in piani diversi, e a cui si dà il nome di curva a *doppia curvatura*. Per farci una chiara idea di questo nuovo genere di curve, s' immagini che attorno ad una delle predette superficie sia avvolto un segmento curvilineo, per esempio un segmento di parabola. È evidente che il perimetro di questo segmento si troverà curvato in due sensi, cioè in quello della parabola, e in quello della superficie cilindrica, sulla quale trovasi avvolto: formerà dunque una curva a doppia curvatura; e come non può stendersi in alcun modo una retta da un punto all' altro lungo il perimetro del segmento, quando questo non sia triangolare, così non potremo neppur condurla lungo il perimetro della curva a doppia curvatura, la quale per conseguenza non potrà esser mai descritta in un piano (422).

853. Or per poco che si consideri, facilmente comprenderemo che l' intersezione di due superficie cilindriche qualunque deve generalmente portare a curve di tal natura. Ed è poi chiaro che con lo stesso sistema di due projezioni potremo sempre rappresentar queste come le curve piane, con la sola differenza che le projezioni delle prime non potranno mai degenerare in linee rette. Si supponga per esempio che qeste projezioni, o le basi delle due superficie projettanti, sieno due parabole dei parametri p, q e aventi un comun vertice all' origine delle coordinate, e per assi l' una quello delle x, l' altra quello delle y. Supposta l' una nel piano delle x, y, l' altra nel piano delle y, z, avremo per equazione della prima $y^2=px$, e per quella della seconda $z^2=py$. Dati ad y dei valori se ne avranno altrettanti per x e per z, e ciascuno dei tre corrispondendo ad un punto della curva, questa si troverà per tal modo esattamente descritta.

201 854. Passando adesso alle stesse ricerche per le superficie, abbiasi primieramente il piano indefinito CBD, e sia B il punto ove uno qualunque degli assi, per esempio quello delle z, lo in-

contra; BC, BD ne rappresentino le *tracce sui piani delle* x, z *e delle* y, z, cioé le intersezioni con questi piani; infine sieno 201
ω, ω' gli angoli dell' una traccia con l' asse delle x, dell' altra con quello delle y. Condotta per un punto qualunque E di BD la retta EF parallela all' altra traccia BC, e supposte x', y', z' le coordinate di BD, x, y, z quelle di EF e fatta $AB=C$, avremo fra z' ed y' l' equazione $z'=y' \, tang \, \omega'+C$ (848. 4.°, 849. 3.°), e fra z ed x l' altra equazione $z=x \, tang \, \omega+b$ (848. 4.°), ove b rappresenterà ciò che diviene z al punto E (849. 3.°); ma in questo punto, comecchè comune ad EF e a BD, si ha $z=z'$ e di più $y'=y$; dunque $b=z'=y \, tang \, \omega'+C$; e quindi $z=x \, tang \, \omega+y \, tang \, \omega'+C$, equazione che spettando alle tre coordinate x, y, z di qualsivoglia punto F della parallela qualunque EF, spetta perciò a qualunque punto del piano, ed è per conseguenza l' equazione del piano. Potremo porla sotto la forma di $z=Ax+By+C$, e in tal caso 1.° A, B rappresenteranno le tangenti degli angoli che le traccie BD, CB fanno respettivamente con gli assi corrispondenti alla coordinata che A e B respettivamente accompagnano; e C sarà, come abbiam detto, il valor di z al punto ove il piano è incontrato dall' asse Z. Quindi 2.° per un altro piano parallelo al primo i coefficienti A, B rimarranno gli stessi, e solo varierà C di quanto l' asse Z incontrerà più in alto o più in basso il nuovo piano. 3.° Permutando l' una nell'altra le tre coordinate, potremo aver del pari $x=Ay+Bz+C$, $y=Ax+Bz+C$; inteso però che ad A, B, C si attribuiscano i valori correlativi ai corrispondenti cangiamenti. 4.° In ogni caso A, B, C dovranno al solito riguardarsi come quantità note, quando il piano è dato, e come le incognite del problema, quando il piano si cerca.

855. Le due tracce DB, BC prendon comunemente il nome l' una di *generatrice*, l' altra quello di *direttrice* del piano; in quanto che il piano può immaginarsi come generato dalla prima, mossa lungo la seconda, e sempre parallelamente a lei stessa. Si noti però che anche in altre guise può concepirsi generato un piano qualunque, cioè da una retta che scorra sopra due rette date e concorrenti; da una retta che si muova intorno ad un punto fisso, facendo costantemente angoli eguali con due rette condotte per il medesimo punto; da una retta che costantemente passando per un punto fisso scorra sopra una retta data. Ma noi

non avremo occasione di considerarlo che nella prima maniera.

856. Infine si osserverà che tanto il punto, quanto la retta ed il piano son determinati da equazioni di primo grado; ma il punto ne ha tre, la retta due, il piano una.

857. Abbiasi ora una superficie cilindrica, e per maggior generalità supponiamo che non una circonferenza, ma una curva qualunque data ne sia la base(851). Potremo dunque riguardarla come generata da una retta che scorra parallelamente a se stessa lungo la data curva, e chiameremo quella *generatrice*, questa *direttrice*. Sieno frattanto $x=az+b$, $y=a'z+b'$ l' equazioni della generatrice allorchè giunge ad un punto qualunque F della direttrice. Si sa (849) che b, b' varieranno di valore col punto F; mentre a, a' saran costanti, giacchè la retta generatrice si mantiene in ipòtesi sempre parallela a se stessa (848.5.°). Frattanto siccome il punto F appartiene insieme e alla generatrice e alla direttrice, spettano dunque ad esso tanto le due equazioni precedenti, quanto le due della curva direttrice (850). Abbiamo dunque per rapporto a questo punto quattro equazioni, tutte coesistenti, e tali perciò che le x, y, z dell' una sono le stesse che quelle dell' altra, comecchè tutte relative ad un punto medesimo. Potremo dunque col mezzo di dette quattro equazioni eliminare queste tre coordinate, d' onde risulterà un' equazione fra le sole variabili b, b', nella quale sostituito il valor di $b=x-az$ e di $b'=y-a'z$, si avrà una nuova equazione fra le sole x, y, z indipendente affatto da b, b', e spettante perciò a ciascun punto della generatrice in qualunque delle sue situazioni, che è quanto dire a ciascun punto della superficie proposta, e che in conseguenza sarà l' equazione di questa superficie. Si supponga per esempio che la base del cilindro sia un circolo del raggio r col centro all' origine delle coordinate, e situato sul piano delle x, y. Avremo per ogni punto della sua circonferenza (846 1.°) $z=0$, (537)$x^2+y^2=r^2$. Fatta la prescritta eliminazione risulterà $b^2+b'^2=r^2$, e quindi per l'equazione richiesta $(x-az)^2+(y-a'z)^2=r^2$. Che se il cilindro sia normale al piano delle x, y avremo (848. 6.°) $a=0$, $a'=0$ e l' equazione diverrà $x^2+y^2=r^2$, cioè sarà la stessa che quella della sua base, il che deve egualmente accadere, siccome è chiaro, qualora pure la base non sia circolare.

858. Debba cercarsi adesso l' equazione alla superficie co-

nica, per la quale intenderemo quella qualunque superficie, che può venir generata da una retta, la quale tenendosi con uno dei punti ferma ad un centro fisso, sia fatta scorrere lungo una curva data, che sarà dunque in tal caso la direttrice del cono. Supposte α, β, $\varkappa$ le coordinate del punto fisso, potremo esprimer con $x=a(z-\varkappa)+\alpha$, $y=a'(z-\varkappa)+\beta$ (846) le due equazioni della retta generatrice allorchè toccherà la direttrice in un punto qualunque F. Saranno α, β, $\varkappa$ costanti, ed a, a' varieranno col punto F, poichè cangiando continuamente l' obliquità della generatrice sui piani, varia dunque altresì l' angolo della projezione con gli assi, dal quale quelli di a, a' dipendono (848). Or se qui si ragioni come per rapporto al cilindro, concluderemo che queste equazioni spettando a tutta la retta generatrice, spettano anche al punto F, al quale d' altronde appartengono pure le due equazioni della direttrice (850). Dovranno dunque a, a' esser tali che i valori x, y, z delle due prime equazioni soddisfacciano anche alle seconde; ed avremo perciò quattro equazioni coesistenti, dalle quali eliminate x, y, z, ne nascerà una quinta fra le variabili a, a', e quindi fra i loro valori $\frac{x-\alpha}{z-\varkappa}$, $\frac{y-\beta}{z-\varkappa}$, che essendo indipendente da a, a' apparterrà a tutta la generatrice in ciascuna posizione della medesima, e quindi alla superficie cercata. Si supponga per esempio che la direttrice sia un circolo del raggio r, steso sul piano delle x, y e col centro all' origine delle coordinate. L' equazioni della base o direttrice saranno $z=0$, $x^2+y^2=r^2$. L' eliminazione darà $(\alpha-a\varkappa)^2+(\beta-a'\varkappa)^2=r^2$, cioè posti i valori di a, a', $[\alpha(z-\varkappa)-\varkappa(x-\alpha)]^2+[\beta(z-\varkappa)-\varkappa(y-\beta)]^2=r^2(z-\varkappa)^2$, equazione cercata. Se il cono è retto avremo $\alpha=0$, $\beta=0$ (846. 3.°), e quindi $x^2+y^2=\frac{r^2}{\varkappa^2}(z-\varkappa)^2$, ove $\frac{r}{\varkappa}$ è la tangente dell' angolo al vertice fatto dalla generatrice o apotema con con l' asse.

859. Vogliasi cercare infine l' equazione ad una superficie di rivoluzione; e per maggior semplicità si supponga l' asse di rivoluzione coincidente coll' asse delle z. Immaginata una qualunque sezione fatta normalmente all' asse ad una distanza z dal piano delle x, y, e suppostone ρ il raggio, la natura circolare della sezione darà $x^2+y^2=\rho^2$. Ma il raggio ρ è un'ordinata alla curva generatrice, e può quindi aversene il valore dato per

z; sostituito dunque questo valore, avremo un'equazione fra x,y,z che sarà la cercata. Così se la superficie sia quella di una sfera del raggio r col centro in A concorso degli assi, avremo $\rho^2=r^2-z^2$ e per l'equazione della sfera $x^2+y^2+z^2=r^2$. Se sia un'ellissoide degli assi a, b e col centro al medesimo punto, avremo $\rho^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-z^2)$ ed $x^2+y^2+\frac{b^2z^2}{a^2}=b^2$. Se sia una paraboloide del parametro p e col vertice parimente in A, avremo $\rho^2=pz$, ed $x^2+y^2=pz$.

860. Per dare adesso un' idea dell' uso ordinario di tutte queste dottrine, ci proporremo le seguenti applicazioni, che tra le molte son le più semplici, e tutte riguardano la retta ed il piano.

I. Sieno dati di posizione due piani non paralleli, e si cerchino l' equazioni della loro comune intersezione. Supposta (854) $z=Ax+By+C$ l' equazione dell' uno dei dati piani, e $z=A'x+B'y+C'$ quella dell' altro, le quantità A,B,C, A',B',C' saranno tutte note, supponendosi nota la posizione dei piani (854.4.°). Inoltre poiché l'intersezione é una retta comune ad ambedue, spetteranno perciò a ciascun punto della medesima tanto la prima, che la seconda equazione; e rapporto unicamente a questa retta, le y,x,z dell'una saranno quantità in tutto identiche ed equivalenti a quelle dell'altra. Or se da queste equazioni riunite si elimina z, avremo $(A-A')x+(B-B')y+C-C'=0$; se si elimina y, avremo $(B'-B)z+(A'B-AB')x+BC'-B'C=0$, equazioni di cui la prima rappresenterà la projezione dell' intersezione cercata sul piano delle x, y (848. 2.° e 3.°), la seconda la rappresenterà sul piano delle x, z; e quindi ambedue serviranno a dar la posizione della retta cercata (845), o saranno le domandate equazioni.

II. Trovare l' equazione di un piano che passi per un punto dato parallelamente ad un piano dato. Sieno x', y', z' le coordinate note del punto, e $z=Ax+By+C$ l' equazione del piano dato; sarà $z=Ax+By+C'$ quella del piano parallelo (854. 2.°). ove non avremo d'incognita che la sola C'. Or poiché il punto dato deve per condizione trovarsi sul piano parallelo, dovrà dunque sussistere fra le sue coordinate l' equazione generale del piano, onde avremo $z'=Ax'+By'+C'$; di qui il valor di C', che so-

stituito nell'equazione generale, darà $z=A(x-x')+B(y-y')+z'$, equazione cercata del piano parallelo.

III. Trovar l' equazioni di una retta che debba passare per un punto dato.

Sieno come sopra x', y', z' le coordinate note del punto dato, ed $x=az+b$, $y=a'z+b'$ l' equazioni della retta cercata (848). Perchè questa retta passi per il punto dato debbono aver luogo l' equazioni $x'=az'+b$, $y'=a'z'+b'$; di qui i valori di b, b' che sostituiti nelle due precedenti equazioni daranno per le cercate $x=a(z-z')+x'$; $y=a'(z-z')+y'$, ove restando indeterminate a, a' ne risulta che la retta potrà avere un' infinità di direzioni (848. 4.°), come é d' altronde evidente.

IV. Trovar l' equazioni di una retta che passa per due punti dati.

Supposte x',y',z' le coordinate del primo punto, x'',y'',z'' quelle del secondo, ed $x=az+b$, $y=a'z+b'$ l' equazioni cercate, la doppia condizione darà $x'=az'+b$, $y'=a'z'+b'$, $x''=az''+b$, $y''=a'z''+b'$. Di qui i valori di a, b, a', b', che sostituiti nelle due equazioni daranno per quelle della retta cercata $x(z'-z'')=z(x'-x'')+z'x''-x'z''$, $y(z'-z'')=z(y'-y'')+z'y''-y'z''$.

V. Trovar l' equazioni di una retta parallela ad un' altra data, e che passi per un punto dato.

Supposte le solite coordinate del punto dato, e che $x=az+b$, $y=a'z+b'$ sieno l' equazioni della retta data, potranno supporsi $x=az+\beta$, $y=a'z+\beta'$ quelle della parallela (848. 3.°), con la quale attesa l' altra condizione del problema, dovranno aver luogo le due $x'=az'+\beta$, $y'=a'z'+\beta'$. Di qui i valori di β, β' che daranno per le due equazioni cercate $x=a(z-z')+x'$, $y=a'(z-z')+y'$.

VI. Trovar l' equazioni di una retta che passi per un punto dato parallelamente ad un piano dato.

Oltre le due equazioni $x=a(z-z')+x'$, $y=a'(z-z')+y'$ dovute (probl. III.) alla retta cercata in virtù della prima condizione, le apparterrà anche l' altra $z=A(x-x')+B(y-y')+z'$, quella cioè del piano parallelo al dato e che passa per il punto dato (probl. II.). Posto in questa il valor di x preso dalla prima, avremo fra z ed y la nuova equazione $(z-z')(1-Aa)=B(y-y')$, che con la prima formerà il sistema delle equazioni cercate. Il valor di a restando indeterminato, mostra che il pro-

blema ha un numero indefinito di soluzioni. Infatti qualunque retta condotta sul piano parallelo e che passi per il punto dato, é atta a soddisfarvi.

VII. Trovare l' equazioni della retta che da un punto dato scenda normalmente ad un piano dato.

La prescrizione del punto di partenza darà, come sopra (probl. III.) per equazioni della retta $x=a(z-z')+x'$, $y=$
801 $a'(z-z')+y'$, e resteranno da determinarsi a ed a'. Sia frattanto $z=Ax+By+C$ la solita equazione del piano dato. Dovendo questo esser normale alla retta, le sue tracce BC, BD sui piani delle x,z ed y,z (854) saranno normali alle due projezioni della retta sopra i medesimi piani (593), e perciò, come é facile a vedersi, gli angoli che le due projezioni fanno con l'asse Z saranno respettivamente supplementi agli angoli che l' una delle tracce fa con l' asse X, l' altra con l'asse Y. Ma questi han per tangenti A, B (854. 1.°), quelli a, a' (848. 4.°); dunque $a=-A$, $a'=-B$, e quindi per l' equazioni richieste $x=-A(z-z')+x'$, $y=-B(z-z')+y'$.

VIII. Poste le stesse cose trovar l' equazioni del punto, ove il piano è incontrato dalla normale.

Dovendo questo punto appartenere insieme alla retta ed al piano, avranno luogo contemporaneamente per esso e le due equazioni della retta e quella del piano. Con queste, fatto $C-z'+Ax'+By'=L$, troveremo per le tre coordinate del punto cercato

$$z=\frac{L}{1+A^2+B^2}+z';\ x=-\frac{AL}{1+A^2+B^2}+x';\ y=-\frac{BL}{1+A^2+B^2}+y'.$$

IX. Trovar l' espressione della distanza di un punto ad un piano, o della normale condotta da quello su questo.

Le tre equazioni precedenti danno $z-z'=\frac{L}{1+A^2+B^2}$,

$x-x'=-\frac{AL}{1+A^2+B^2}$, $y-y'=-\frac{BL}{1+A^2+B^2}$; dunque $\sqrt{((x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2)}=\frac{L}{\sqrt{(1+A^2+B^2)}}$ distanza cercata, in quanto che il primo membro rappresenta quella del punto dato al punto d' incontro della normale col piano (730), o delle due estremità della normale.

X. Trovare il valor dell' angolo A fatto da due rette date. Supposte $x=az+b$, $y=a'z+b'$ l' equazioni di una delle due rette ed $x'=\alpha z'+\beta$, $y'=\alpha'z'+\beta'$ l' equazioni dell' altra, saranno 1.ª $x=az$, 2.ª $y=a'z$, 3.ª $x'=\alpha z'$, 4.ª $y'=\alpha'z'$ quelle di due rette condotte dal concorso degli assi parallelamente alle date (848. 5.°, 849. 1.°), e l' angolo delle quali sarà per conseguenza equivalente al cercato. Preso sull' una e sull' altra parallela un punto ad una distanza $r=1$ dall' origine, e chiamata δ la distanza dell' uno all' altro, avremo (730) 5.ª $x^2+y^2+z^2=1$, 6.ª $x'^2+y'^2+z'^2=1$, 7.ª (*ivi*) $\delta^2=(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2$, cioé per la 5.ª e la 6.ª $\delta^2=2(1-xx'-yy'-zz')$. Ma altresì (682) $\delta^2=2-2\cos A$, dunque $\cos A=xx'+yy'+zz'$, ovvero introdotti i valori delle sei ordinate tratti dalle sei equazioni precedenti

$$\cos A=\frac{1+a\alpha+a'\alpha'}{\sqrt{(1+a^2+a'^2)}\sqrt{(1+\alpha^2+\alpha'^2)}}.$$

Quindi 1.° se l' una delle rette é normale all' altra avremo $\cos A=0$, ed $1+a\alpha+a'\alpha'=0$, d' onde tratto il valor di a' e sostituitolo nella seconda delle due equazioni generali, avremo da questa e dalla prima il sistema dell' equazioni convenienti a due rette normali. 2.° Se una delle rette é parallela ad uno degli assi, come sarebbe all' asse x, sarà $y'=0$, $z'=0$ (840. 2.°), e la 6.ª darà $x'=1$. Di qui $\cos A=x=az$, ma la 1.ª, 2.ª e 5.ª danno

$$z^2=\frac{1}{a^2+a'^2+1}, \text{ dunque } \cos A=\frac{a}{\sqrt{(a^2+a'^2+1)}}.$$

Nel modo stesso si troverebbe $\cos A=\frac{a'}{\sqrt{(a^2+a'^2+1)}}$, $\cos A=\frac{1}{\sqrt{(a^2+a'^2+1)}}$ nei casi che una delle rette sia parallela all' asse Y o all' asse Z. Queste tre formule daran dunque gli angoli che una retta qualunque fa con gli assi. Si chiamino per chiarezza maggiore X, Y, Z questi angoli; quadrando e sommando i tre coseni, avremo $\cos^2 X+\cos^2 Y+\cos^2 Z=1$, dal che si deduce che uno degli angoli fatti dalla retta coi tre assi é sempre dipendente dagli altri due, come é d' altronde manifesto.

Se X', Y', Z' sieno gli angoli degli assi con un'altra retta, il valore già trovato sopra dell'angolo fatto dalle due rette tra loro, si cangia assai facilmente in $\cos A=\cos X\cos X'+\cos Y\cos Y'+\cos Z\cos Z'$; onde nel caso di due normali, avremo $\cos X\cos X'+\cos Y\cos Y'+\cos Z\cos Z'=0$.

X. Trovare l' angolo θ fatto da due dati piani. Sieno al solito $z=Ax+By+C$, $z'=A'x'+B'y'+C'$ l' equazioni dei due piani. Immaginando condotte dal centro due normali, l' una sull' uno, l' altra sull' altro dei due piani, saranno $x=Az$, $y=Bz$, $x=A'z$, $y=B'z$ le loro equazioni (probl. VII.), e il loro angolo eguaglierà quello dei piani (695). Avremo dunque (probl. X) $\cos\theta=\frac{1+AA'+BB'}{\sqrt{(1+A^2+B^2)}\sqrt{(1+A'^2+B'^2)}}$; onde se i piani sono ad angolo retto, dovrà aversi $1+AA'+BB'=0$.

GEOMETRIA DESCRITTIVA

861. Il metodo delle projezioni non solo risolve analiticamente i problemi, nei quali entrano punti o linee situate in piani diversi, ma dà anche mezzi assai facili per la loro costruzione geometrica (552), ed insegna ad operare sulle grandezze considerate nello spazio con la stessa facilità e con lo stesso rigore, che si ottiene dalla Geometria piana rapporto alle grandezze situate in un piano. Il metodo prende allora il nome di *Geometria descrittiva*, scienza di grandissima utilità per le arti, specialmente per quelle d' intaglio, di prospettiva e architettoniche, nelle quali le questioni del genere, di cui si parla, sono infinite, e si ha bisogno di soluzioni reali, effettive ed esatte, e non già astratte o semplicemente rappresentate da una figura descritta in un piano, a cui col soccorso dell' ombre si sia data una qualche apparenza di rilievo. Non potendo impegnarci in un pieno trattato di questo interessante e vastissimo soggetto, ci limiteremo a darne le nozioni più elementari, che applicheremo alle costruzioni dei problemi relativi alla linea retta, al piano, alle curve piane e alle sfere. I Giovani che volendosi dedicare alle arti avesser perciò bisogno d'istruzione maggiore, potranno consultare le opere classiche di *Monge*, *La-Croix* e *Vallée*.

862. Di due soli piani di projezione si fa generalmente uso nella Geometria descrittiva, l' uno chiamato *orizzontale*, l' altro *verticale*, in quanto che gli oggetti che occorrono in pratica son
202 per lo più collocati in questi due sensi. Abbiasi pertanto un punto P situato nell' angolo di questi piani, e sieno A, B le di lui projezioni sull'uno e sull'altro. È manifesto che queste projezioni, o le loro distanze AT, BT dall'intersezione MN dei due piani, de-

terminano completamente la posizione del punto P. Ora s' immagini che il piano verticale OM rivolgendosi intorno all' intersezione MN, si ripieghi sul prolungamento MU del piano orizzontale MR, e sia A' il luogo che in questa nuova situazione del piano prenderà il punto B. È evidente che sarà A'T normale ad NM (582), e di più eguale a BT; in conseguenza la retta A'T rappresenterà come BT la distanza di B a T, o l' altezza di P al di sopra del piano orizzontale: potrà dunque sostituirsi a BT per rappresentare con AT la posizione di P. 202

863. Col medesimo raziocinio si proverebbe che se CD, EF sieno le projezioni di una retta (844) o le traccie di un piano (854) sopra quelli di projezione, e sia C'D' la situazione che prende EF allorché il verticale é ripiegato sul prolungamento del piano orizzontale, potremo sostituire C'D' in luogo di EF per rappresentare insieme con CD la posizione della retta o del piano. Or questo semplicissimo principio può riguardarsi come il fondamento della Geometria descrittiva. Col mezzo di esso ogni imbarazzo proveniente dalla necessità di operare sopra due piani diversi, vien tolto; e tutte le costruzioni si riducono ad un solo e medesimo piano.

864. Prima però di passare ad applicarlo alle costruzioni che ci siamo proposte (861), premetteremo come proposizioni evidenti, o facili a dedursi dalle cose già dette, 1.° che unite le due projezioni A, A' del punto P, la retta AA' passerà per T e sarà normale ad MN (431. 3.°); onde le due projezioni di un punto son sempre in una stessa normale all' intersezione MN, e perciò data una delle projezioni, l' altra dovrà trovarsi nel prolungamento della normale condotta da quella sopra MN. 2.° Se il punto o la linea data sia sopra uno dei piani ortogonali, la loro projezione sull' altro dovrà cadere sull' intersezione MN. 3.° I punti o le linee situati in uno dei piani si confonderanno con le loro projezioni in quel piano. 4.° La *traccia* di una retta sopra di un piano, o il luogo ove essa lo attraversa o lo incontra, é necessariamente in un punto della projezione della retta in quel piano. 5.° Allorché le due tracce di un piano son convergenti, il loro incontro succederà in qualche punto di MN: deve infatti esser comune alle due tracce, per conseguenza anche ai due piani, e trovarsi perciò nella loro intersezione.

865. Per quanto il piano verticale si supponga ripiegato sul

prolungamento dell' orizzontale, gli conserveremo la denominazione di verticale. Impiegheremo per rappresentarlo quella parte delle figure, che resta al di sopra della retta MN esprimente l' intersezione o divisione dei due piani; riserbando l' altra parte inferiore per rappresentare l'altro piano. Ambedue si supporranno di dimensioni indefinite, come del pari supporremo generalmente indefinite le lunghezze delle rette e le dimensioni dei piani, che entrano come elementi o come oggetti di ricerche nei nostri problemi.

866. Per facilità e brevità di discorso contrassegneremo con un apice le lettere indicative dei punti o linee che abbian luogo nel piano verticale, a distinzione di quelle dell' orizzontale che segneremo senz' apice alcuno. I punti che cadono nell' intersezione MN, e che perciò spettano insieme ai due piani, saranno indicati o con l'apice o senza, secondo che occorrerà di considerarli o nel piano verticale o nell' orizzontale. Allorchè poi tratteremo di un punto, di una linea o di un piano situato nello spazio, noteremo il punto e la linea con le lettere spettanti alle loro projezioni, chiudendole dentro parentesi; ed in pari modo noteremo il piano e le curve con le lettere delle loro tracce. Così (A,A') indicherà un punto, le cui projezioni orizzontale e verticale cadano in A, A'. Del pari (AB, A'B') significherà una retta o un piano che abbiano l'una per projezioni, l'altro per tracce(854) orizzontali e verticali le rette AB, A'B'. Qualora però l' incontro delle tracce AB, A'B' abbia luogo nei limiti della figura, e sia notato per esempio con C, l'indicazione del piano sarà semplicemente (ACA'). Intenderemo al solito esser dati o trovati un punto o una linea, allorchè ne son date o trovate le projezioni: ed esser dato o trovato un piano quando ne son date o trovate le tracce. Infine segneremo nelle figure con linee andanti o *piene* tutte quelle che vengono o date o cercate, e trovate nel problema; con linee *tratteggiate* quelle che sono introdotte ausiliarmente nelle costruzioni, con linee *punteggiate* quella porzione dell' une e dell' altre che passa o al di là del piano verticale o al di sotto dell' orizzontale. Tutto questo premesso, passiamo ai problemi, che disporremo secondo l' ordine di dipendenza che l'uno ha dall'altro. Avremo cura d'inserir fra i medesimi gran parte di quelli che abbiamo già sciolti analiticamente (360).

203 867. I. Date le projezioni C,C' e D,D' dei due punti (C,C'),

(D,D′), costruir la retta che gli congiunge o che ne determina la distanza. 303

Si uniscano C, C′ e D, D′. Da C, D′ si conducano CR normale a DC e D′O′ normale a CC′. Sopra CR si prenda CO=C′O′; unita D con O, la retta DO equivarrà alla cercata. Infatti si concepisce facilmente che questa retta deve corrispondere all' ipotenusa di un triangolo rettangolo, che abbia per un dei cateti la distanza delle projezioni orizzontali dei due dati punti, e per l' altro la differenza delle loro elevazioni al di sopra del piano orizzontale. Ma queste elevazioni son rappresentate da D′*d*, C′*c* (862), e la lor differenza da C′O′=CO; dunque la retta cercata è visibilmente eguale all' ipotenusa DO.

868. II. Data la retta (AB, A′B′) costruir gli angoli formati dalla medesima coi due piani di projezione.

Presi nella retta data due punti qualunque (CC′), (DD′) si eseguisca sopra i medesimi la costruzione del problema precedente; l'angolo CDO del triangolo finale OCD rappresenterà quello della data retta col piano orizzontale. Infatti gli angoli della retta coi piani son quelli della retta con le sue medesime projezioni. Or si concepisca il triangolo COD elevato verticalmente sul cateto DC. È chiaro che la retta data e l' ipotenusa DO si troveranno allora nello stesso piano projettante, e di più diverranno parallele, atteso che la distanza del punto O al punto (CC′) sarà C′*c*—CO=C′*c*—C′O′=D′*d*, distanza del punto D a (DD′). Dunque l'angolo CDO che la projezione orizzontale fa con DO, eguaglia quello che fa con la retta data, o che questa fa col piano orizzontale. Nel modo stesso se ne troverebbe l'altro col piano verticale.

869. III. Data la retta (PQ, P′Q′) trovarne le due tracce (864. 4.°) orizzontale e verticale.

Dai punti B, A′ ove le due projezioni PQ, P′Q′ passano per l' intersezione MN, si alzino normalmente ad MN le rette AA′, BB′. I punti A, B′ d' incontro fra le due projezioni e le due normali determineranno le tracce cercate. Infatti la traccia orizzontale, come punto della retta data, deve aver la sua projezione verticale lungo P′Q′, e come punto situato sul piano orizzontale deve averla lungo MN (684.4.°): l'avrà dunque visibilmente in A′. Dovrà perciò questa traccia trovarsi in qualche punto della normale A′A (864.1.°); ma deve trovarsi anche in PQ (864.4.°): sarà

dunque in A. Il raziocinio medesimo vale anche per l'altra traccia.

203 870. IV Date le tracce A,B' della retta si cercano le projezioni.

Condotte ad MN le normali AA', BB', le rette AB, A'B' saranno le projezioni cercate. Ciò è chiaro per l' antecedente problema.

871. V. Trovare il punto d' intersezione di due rette date.

La projezione orizzontale del punto cercato sarà nel comune incontro delle projezioni orizzontali delle due rette date; la verticale in quello delle verticali. Infatti dovendo questo punto appartenere alle due rette date, anche le sue projezioni dovranno appartenere a ciascuna projezione delle medesime.

204 872. VI. Dati i piani (ABC'), (ADC') trovar le projezioni della loro intersezione comune.

Dai punti A, C' ove le tracce orizzontali e verticali dei due piani si congiungono respettivamente fra loro, conducansi sopra MN le normali AE, C'F: e quindi si unisca A con F, C' con E: saranno AF, C'E le projezioni cercate. Infatti i due punti A, C' appartengono all' intersezione cercata e ne sono le tracce (864. 4.°). Dunque FA, C'E ne sono le projezioni (870).

205 873. VII. Per un punto dato (CC') condurre una parallela ad una retta data (PQ, P'Q').

Le projezioni della retta cercata e quelle della data debbono esser parallele fra loro (594). Se dunque per C, C' si conducano AB, A'B' l' una parallela a PQ, l' altra a P'Q', sarà (AB, A'B') la retta che si domanda. Per più facile intelligenza di ciò che segue si noterà, che se in luogo di (PQ, P'Q') sia data sul piano orizzontale la retta PQ, poiché questa ha una projezione in PQ, l'altra in MN (846. 2.°) perciò una delle projezioni della parallela cercata dovrà esser parallela alla data, l' altra ad MN.

206 874. VIII. Per un punto dato (CC') condurre un piano parallelo ad un piano dato (EFG').

Si conducano CH parallela alla traccia FE, e C'H', HH' l' una normale, l'altra parallela ad MN. La retta (CH, C'H') sarà parallela alla traccia FE (probl. prec.) e per conseguenza al piano (EFG'). Dunque apparterrà interamente al piano cercato; e poichè ha per traccia verticale H' (869), perciò H' sarà un punto dell' intersezione del piano cercato col verticale, o del-

della sua traccia verticale, la quale dovendo esser di sua natura parallela alla traccia verticale del piano dato, si avrà perciò conducendo per H' parallelamente ad FG' la retta I'K'. Nel modo medesimo troveremo la traccia orizzontale. 206

875. IX. Condurre un piano per tre punti dati o per due delle tre rette che gli congiungono.

Ciascuna di queste tre rette appartiene per condizione al piano cercato. Dunque le loro tracce sono altresì punti delle traccie del piano. Perciò trovate quelle (869), avremo le direzioni di queste, e quindi il piano.

876. X. Da un punto dato (A,A') abbassare una perpendicolare sopra un piano dato (BCD'), e determinare il punto d' incontro della normale col piano. 207

Quanta alla prima parte del quesito è manifesto che le projezioni della retta cercata dovranno esser perpendicolari alle tracce del piano, e si avranno perciò conducendo AE, A'G' normalmente a BC,CD'. Quanto all'altra parte si alzi EE' normalmente ad MN. Il piano (AEE') si confonderà col piano projettante verticale della normale trovata (AE, A'G'). Conterrà perciò tutta la normale, e quindi anche il punto cercato. Ma questo deve esser pure nel piano dato (BCD'), dunque caderà nella loro intersezione (EF, E'F') (872), e poichè deve trovarsi del pari nella normale (AE, A'G'), dunque la di lui projezione verticale sarà in H' intersezione delle due tracce verticali E'F', A'G' (871), e l' orizzontale in H incontro di AE traccia orizzontale della normale con HH' normale ad MN (864. 1.°).

877. XI. Per un dato punto (A'A) condurre un piano perpendicolare ad una retta data (BC, B'C'). 208

Si conducano A'D', DD', AD normali l'una a C'B', l'altra ad MN, la terza ad AA'. Quindi da D la DE normale a CB e da E la EF' normale a C'B'. Saranno DE, EF' le tracce del piano cercato. Infatti se questo deve esser per condizione normale alla retta data, le sue tracce e le projezioni della retta saranno respettivamente normali fra loro. Dunque A'D' sarà parallela alla traccia verticale, e lo sarà per conseguenza anche la retta (A'D', AD) (873). Ma questa retta ha comune col piano il punto (A,A'), se dunque é di più parallela ad una delle tracce, deve necessariamente esser tutta quanta in quel piano. Quindi la sua traccia orizzontale D (869. 4.°) sarà altresì un punto del-

208 la traccia orizzontale del piano, la quale dovendo esser inoltre normale a CB, sarà perciò nella direzione di DE, come egualmente la traccia verticale, che deve partirsi da E (864. 5.°) ed esser normale a C′B′, sarà nella direzione di EF′.

878. XII. Condurre un piano perpendicolare ad un piano dato, e che passi per una retta parimente data.

Da un punto qualunque della data retta si condurrà una perpendicolare sul piano dato (876): quindi si farà passare un piano per questa e per la retta data (875), che sarà visibilmente il cercato (591).

879. XIII. Da un punto dato abbassare una perpendicolare ad una retta data.

Si comincerà dal condurre per il punto dato un piano perpendicolare alla retta data (877); si determinerà il punto del loro incontro (876); per questo punto ed il dato si farà passare una retta (867), la quale poichè passa per costruzione dal punto dato, ed é normale alla data (582), sarà perciò la cercata.

209 880. XIV. Date le rette (AB, A′B′), (BC, B′C′) che s'incontrino nel punto (B,B′) trovarne l'angolo.

Si cerchino le tracce orizzontali delle due rette (869), e supposta l'una in A, l'altra in C, si conduca BD normale ad AC, si prenda $bd = BD$, si congiunga $B'd$, e prolungata DB in G, finchè sia $DG = B'd$, si formi il triangolo AGC. È manifesto che AC e le due rette date formeranno un triangolo, che avrà per base la stessa AC, per vertice il punto dato (B,B′), per angolo al vertice l'angolo cercato, é per altezza l'ipotenusa di un secondo triangolo, i cui cateti sono BD, $B'b$, altezza che sarà quindi eguale a $B'd$, e per conseguenza a DG. Perciò il triangolo fatto da AG con le due rette date e il triangolo AGC che hanno altezze eguali, e base e segmenti della base comuni, sono eguali; e l'angolo AGC del secondo è dunque eguale all'angolo opposto ad AC nel primo, e per conseguenza al cercato.

881. XV. Data una retta ed un piano, determinar l'angolo di quella su questo.

L'angolo che qui si cerca è complemento di quello che la retta farebbe con la normale abbassata da qualunque suo punto sul piano. Condotta dunque questa normale (876), e determinato l'angolo che fa con la retta (880), avremo quello della retta col piano.

882. XVI. Dati due piani inclinati l'uno sull'altro trovarne l' angolo.

Stabilita l' intersezione dei due piani (872), si conduca ad un punto qualunque della medesima un piano normale (877); se ne determinino le due intersezioni coi piani dati (872); e costruito l'angolo di queste intersezioni (880), sarà questo l'angolo cercato (589).

883. XVII. Date due rette situate in piani diversi e non parallele, trovar la più picoola distanza dell' una all' altra.

Per un punto qualunque preso sopra la prima delle due rette si condurrà una parallela alla seconda (873). Per questa parallela e per la medesima prima retta si condurrà un piano (875), che sarà dunque parallelo alla seconda. Ad esso piano in direzione della seconda retta si condurrà un piano normale(878); si determinerà l' intersezione dei due piani (872), e il punto ove questa taglia la prima delle due rette (871); e da questo punto si abbasserà una normale sulla seconda (879). È evidente che questa sarà normale anche alla prima, e perciò determinerà la distanza cercata.

884. XVIII. Dato il piano (ABC') trovarne gli angoli d'inclinazione sui piani orizzontale e verticale. 210

Da un punto qualunque D di MN si conducano AD, DC' l' una normale ad MN, l' altra alla traccia BC'. Quindi si prenda DE=DC' e si unisca AE. Il piano (ADC') sarà perpendicolare al piano verticale (591); e quindi anche alla traccia C'B (592)' intersezione del piano dato col verticale. Dunque immaginando uniti A, C' anche AC' sarà normale a C'B (582). Inoltre essendo retto l' angolo ADC', i triangoli ADC', ADE saranno eguali (435. 1.°), e quindi eguali anche gli angoli AC'D, AED. Ma il primo misura l' inclinazione del piano dato sul verticale (589); dunque anche il secondo, che sarà perciò uno dei due cercati. Nel modo stesso costruiremo anche l' altro.

885. XIX. Data la curva (ABC, A'B'C') condurre una tangente ad un suo punto qualunque (BB'). 211

La soluzione di questo problema e dei seguenti relativi alle curve, suppone che si sappia risolver l' altro quesito più semplice e indipendente dal metodo delle projezioni e della Geometria descrittiva: cioè condurre in un piano dato una tangente ad un punto qualunque di una curva, situata nel medesimo

211 piano. Abbiamo già sciolto questo quesito rapporto alle curve coniche (750, 767, 783); daremo altrove il modo di risolverlo generalmente. Ciò premesso, e condotte ai punti B,B' delle curve ABC, A'B'C' le tangenti BM, B'M', è manifesto che l' una sarà la projezione orizzontale, l' altra la verticale della tangente cercata, che sarà perciò rappresentata da (BM, B'M').

886. XX. Trovare l'inclinazione di una curva data sui piani di projezione.

Si conduca ad un punto qualunque della curva una tangente (885); e se ne determini l' inclinazione sui piani (868); è manifesto che questa sarà la cercata, poichè la tangente e la curva sono in un medesimo piano.

212 887. XXI. Dato un punto (P,P') fuori della curva (ACB,A'C'B') condur da quello su questa una tangente.

Si prenda sulla projezione orizzontale ACB della curva data una serie di punti a, a', a'' ec., si conducano ai medesimi le respettive tangenti; sulle tangenti le normali ab, $a'b'$, $a''b''$ ec., e su di queste da P le normali Pb, Pb', Pb'' ec. Per i punti b, b', b'' ec. si faccia passare la curva $bb'b''$ (725) e al punto C, ove questa taglia l' altra, si conduca da P la retta PC. Questa come tutte le altre condotte da P sulla curva $bb'b''$ sarà ad angolo retto con la normale al punto C della curva ACB, quindi sarà tangente in C (534), e C sarà la projezione orizzontale del punto di contatto cercato. Quanto alla verticale si sa che deve trovarsi in un punto di CC' normale ad MN (864 1.°), e nel tempo stesso in un punto della curva A'C'B': sarà dunque nel comune incontro C', e P'C' darà la projezione verticale della tangente richiesta, come PC dà l' orizzontale. Si noterà di passaggio che alla curva $bb'b''$ ec. si dà il nome di *curva degli errori*, ossia curva delle false posizioni (339), in quanto che le rette Pb, Pb', Pb'' ec. sono come altrettante situazioni che in certo modo falsamente si attribuiscono alla retta data, e che col mezzo indicato portano poi a trovarne la vera.

213 888. XXII. Sopra una curva (ACB, A'C'B') condurre una tangente parallela ad una retta (PQ, P'Q') data nel piano della curva.

Ai punti a, a', a'' ec. presi lungo la curva ACB si conducano le tangenti ab, $a'b'$, $a''b''$ tutte eguali fra loro, e dirette in un medesimo senso. Da b, b', b'' ec. si abbassino le bd, $b'd'$, $b''d''$ ec. parallele alla projezione PQ della retta data e parimente

eguali fra loro. Si descriva la curva che passa per i punti d, d', d'' ec. ; e dal punto C, ove questa taglia l' altra, si conduca CT parallela a PQ. É chiaro che la projezione orizzontale della tangente cercata dovrà trovarsi fra le parallele $bd, b'd', b''d''$ ec.; ma non può trovarsi fra quelle che cadono sul ramo interiore $Cd'''d^{v}$ della nuova curva, perchè queste son visibilmente secanti della curva ACB, non fra quelle che cadono nell' altro ramo esteriore, perchè queste non incontrano in verun luogo la curva ABC; dunque sarà quella che cade in C, cioè la TC. Avuta così la projezione orizzontale della tangente cercata, avremo la verticale elevando al solito normalmente ad MN la CC' fino all' incontro in C' con la curva A'C'B', e unendo C' con P'. 213

889. XXIII. Data la curva (ABC, A'B'C') e il piano (DEF'), trovar la loro comune intersezione. 214

Da un punto qualunque G di ABC si conduca GK parallela alla traccia orizzontale DE, e GG' normale ad MN. Inoltre da K e K' si conducano KK', K'G' l' una normale, l' altra parallela ad MN. Sarà (GKK') un piano verticale che intersecherà lungo la retta (KG, K'G') il piano dato (DEF') (872), e conterrà di più la normale (Gg, G'g) elevata sul punto G del piano orizzontale. Or questa si trova altresì nella superficie projettante verticale della curva data (851): dunque (G,G') è un punto d' incontro fra il piano dato e la detta superficie projettante, e G' ne è la projezione verticale, come G l'orizzontale. Nel modo stesso potremo aver tutti gli altri punti dell' intersezione del piano colla superficie projettante, e le loro projezioni verticali, che formeranno sul piano verticale una curva, la quale supporremo rappresentata da D'G'L'. Sarà dunque (ABC, D'G'L') la curva prodotta dalla suddetta intersezione del piano colla superficie projettante, e la curva dei punti comuni alla superficie ed al piano. Ma questa superficie contiene altresì i punti della curva data (851), e perciò anche i punti cercati, e questi debbon di lor natura esser comuni anche al piano, e perciò alla curva (ABC, D'G'L'); resteranno dunque determinati dall'intersezione della curva data con la curva (ABC, G'D'L'), o da quelle delle loro projezioni.

890. XXIV. Dato un punto ed una curva condur per quello un piano normale a questa.

Presa sulla curva data una serie di punti, e da ciascun

di essi condotta una tangente, si faranno passare per il punto dato dei piani normali ad esse tangenti (877) e si determineranno le intersezioni (876). Descritta quindi la curva formata dalle medesime intersezioni, i punti, ove questa taglia la data, saranno evidentemente i cercati.

891. XXV. Data una sfera ed un piano secante, determinare il circolo della sezione.

Le projezioni orizzontali e verticali della sfera sono le basi di due cilindri circoscritti, che han per centri le projezioni del centro della sfera. Determinati dunque quei centri (460), avremo quello della sfera (862). Da questo si condurrà una perpendicolare sul piano secante (876), si determinerà il punto, ove essa lo incontra (*ivi*), e sarà il centro del circolo cercato (693). Costruito in seguito un triangolo rettangolo che abbia il raggio della sfera per ipotenusa, e per uno dei cateti la predetta normale, l' altro cateto sarà il raggio della sezione. Se poi occorresse averne le projezioni effettive, si cercheranno le inclinazioni θ, θ' del piano secante sull' orizzontale e sul verticale (872); e supposto r il raggio della sezione, trovato come si è detto, si costruiranno l' ellissi delle equazioni $y^2 = cos\theta(2rx - x^2)$, $y'^2 = cos\theta'(2rx' - x'^2)$ prendendo per centri quelli delle due projezioni della sfera, e per assi delle ascisse le due tracce del piano secante. Queste curve così descritte saranno le projezioni cercate (857. 2.°).

* 892. XXVI. Trovare il centro e il raggio di una sfera che passa per quattro punti noti.

Si uniranno con rette il primo punto col secondo, il secondo col terzo, il terzo col quarto (867). Sulla metà di ciascuna di queste tre rette si alzerà un piano normale (877), si determinerà l' intersezione del primo di questi col secondo, e del secondo col terzo (872): il punto ove queste due intersezioni concorreranno sarà il centro cercato. Infatti le rette che uniscono i punti dati son corde della sfera, dunque i piani alzati normalmente sulle loro metà contengono i raggi normali alle medesime (446); passano perciò tutti per il centro, che essendo quindi comune ai tre piani deve combinarsi nel concorso di due delle loro intersezioni. Trovato il centro, si unirà con uno dei punti dati (867) e si avrà il raggio.

893. XXVII. Trovar l' intersezione di due sfere date.

Premettiamo che questa sezione è un circolo; infatti se da qualunque punto di essa si conduca una normale sulla retta che unisce i due centri, sarà quella un' ordinata comune ad ambedue le sfere; apparterrà dunque ad ambedue il circolo minore corrispondente (693), che perciò sarà l' intersezione delle due sfere. Inoltre il piano di questo circolo sarà normale alla linea dei centri (582), il raggio corrisponderà alla perpendicolare calata dal vertice del triangolo, che ha per base la linea dei centri e per i lati i raggi delle due sfere, ed il centro caderà sull' incontro della perpendicolare sulla base. Sia ACB questo triangolo, CD la perpendicolare, ed AD, DB i due segmenti. Sieno 215
inoltre θ, θ' le inclinazioni della linea dei centri coi due piani di projezione (868). Saranno $90-\theta$, $90-\theta'$ quelle dei piani medesimi col piano della sezione. Avremo dunque le projezioni di questa sezione costruendo l'ellissi dell'equazioni $y^2 = sen\theta(2x \times CD - x^2)$, $y'^2 = sen\theta'(2x' \times CD - x'^2)$, dirigendone l' asse maggiore normalmente alle projezioni di AB (877), e fissandone il centro lungo queste projezioni ad una distanza da quelle del centro A corrispondente ad AD$cos\theta$ per l' una, ed AD $cos\theta'$ per l'altra(675).

894. XXVIII. Trovare i punti comuni a tre sfere date, che s' intersecano fra di loro.

Costruite nel modo precedente le sezioni della prima con la seconda, della seconda con la terza; i punti che si troveranno esser comuni a queste sezioni saranno i cercati.

895. XXIX. Condurre un piano tangente ad una sfera in un punto dato.

Si condurrà un raggio al punto dato (867), all' estremità del raggio si alzerà un piano normale (877), che sarà il piano richiesto.

896. XXX Data una sfera ed una retta fuori di essa, condurre per la retta un piano tangente alla sfera.

Per il centro della sfera si farà passare un piano normale alla retta data (877), si descriverà la sezione della sfera e del piano (891); si determinerà l' incontro del piano con la retta (876), e da questo si condurrà una tangente sulla sezione (888). Per questa tangente e per la retta data si farà passare un piano (875), che sarà tangente alla sfera.

987 XXXI. Condurre un piano tangente a tre sfere date.

Per semplicizzare questo problema prenderemo per pia-

no orizzontale quello che passa per i centri delle tre sfere. Sieno frattanto HTO, KLR, IGP i tre circoli massimi, sezioni respettive delle tre sfere e del piano. Si conducano HS, OQ tangenti comuni l' una alla prima e seconda sezione (629. II.), l'altra alla prima e alla terza: l' una e l' altra si prolunghino fino ai loro incontri in S, Q coi prolungamenti delle linee dei centri AB, AC. Su queste linee dai contatti H, O si abbassino le normali HI, OR, che prolungate si suppongano concorrere in T. É visibile 1.° che se si faccian girare i triangoli HIS, ORQ intorno ai lati IS, RQ nasceranno due coni retti (611) circoscritti, e quindi tangenti alle sfere; 2.° che questi coni avranno per basi i circoli descritti dalle ordinate HI, OR; 3.° che i piani di queste basi saranno normali al piano orizzontale, ed avranno per tracce orizzontali le rette HT, OT; 4.° che il punto T comune alle due tracce sarà la projezione orizzontale del punto comune alle circonferenze delle due basi; 5.° che l' altezza della projezione verticale di questo punto al di sopra del piano orizzontale, sarà l' ordinata corrispondente all' ascissa AT. Col mezzo di queste due projezioni avremo dunque il punto d' intersezione delle due basi dei coni, ed unito questo punto con S, Q (867) avremo due rette, l' una delle quali appartenendo ad un cono, l' altra all'altro, saranno tangenti quella alla prima e seconda sfera, questa alla prima ed alla terza. Perciò fatto passare un piano per esse due rette (875), questo sarà tangente alle tre date sfere.

898. La posizione assegnata ad arbitrio nell'ultimo problema al piano orizzontale, e che ha contribuito a dar la maggior possibile semplicità alla soluzione del medesimo, avrebbe egualmente rese più semplici quelle di molti altri dei problemi precedenti. Or questo arbitrio è quasi sempre lecito in pratica, e si rende poi indispensabile quando si tratti di superficie di un genere più elevato, rapporto alle quali le costruzioni riescirebber complicatissime, quando non fosse libera la scelta della posizione dei piani di projezione. Conforme alla protesta già fatta (861), noi non c'inoltreremo in queste ricerche, che ci porterebbero ad oltrepassar di troppo i limiti prescritti dalla natura e dall'oggetto di questi elementi. Non possiamo però dispensarci dal dare almeno un accenno della maniera, con la quale si può rappresentare col metodo delle projezioni una superficie

qualunque, purché sottoposta alle leggi di continuità, quali son quelle appunto che nei più dei casi occorrono nelle arti.

899. Ogni superficie di tal natura può supporsi generata 1.° da una linea qualunque di forma data e costante, che si muova parallelamente a se stessa in modo che qualunque dei suoi punti si trovi costantemente in una medesima retta direttrice; tali sono le superficie piane (855) e le prismatiche (602); 2.° da una linea di forma egualmente costante che si muova intorno ad una retta direttrice data; tali sono le superficie dei solidi di rivoluzione (603); 3.° da una linea che cangiando di posizione nell'uno dei due modi predetti cangi anche di forma secondo una legge data: tali sono la superficie dei solidi piramidali, che possono immaginarsi formate dal perimetro della base, il quale muovendosi lungo una retta AB decresca in ogni suo lato in ragione della sua distanza dal punto B; che se il decrescimento fosse in un altra ragione, per esempio in quella delle radici delle distanze dal punto B, risulterebbe un nuovo genere di piramidi, le cui facce sarebber curvate in forma parabolica; 4.° da una retta che passando costantemente per un punto fisso scorra lungo il perimetro di una curva data: tali sono le superficie che abbiamo chiamate *conoidali* (858).

900 Or qualunque abbia luogo o di questi o di molti altri sistemi consimili di generazione che potrebbero concepirsi, è certo che la superficie può sempre considerarsi come prodotta dal muovimento di una linea di forma o costante, o variabile nel senso o di una linea direttrice, o di una superficie direttrice. Essa è dunque data, tosto che è data la direttrice, data la legge del muovimento della linea generatice, e data la forma di questa linea, e di più le condizioni di variabilità di essa forma, quando si supponga variabile. Quindi per rappresentare convenientemente tal superficie sui piani di projezione basterà 1.° descrivervi le curve di projezione della direttrice; 2.° ad ogni punto o pel maggior numero possibile di punti di queste curve segnar le corrispondenti projezioni della generatrice, secondo le posizioni e forme che in quei punti corrisponderanno alle leggi del suo movimento e delle sue variazioni. È facile comprendere come da un tal modo di rappresentare si avranno quanti punti si vorrà della superficie rappresentata, e che le projezioni delle diverse posizioni della generatrice avranno forme particolari, le

quali manifesteranno assai chiaramente quella della superficie generata. I giovani che vorran più oltre avanzarsi in questo importante ramo di scienza, avran luogo di ben conoscere come questo sistema si adatta a tutte le operazioni possibili, e gode egualmente che i precedenti del prezioso vantaggio di fare imagine.

INFINITI E INFINITESIMI

901. Intendiamo per quantità *infinite* e per quantità *infinitesime* quelle, la cui grandezza o piccolezza eccede qualunque valore che lor si volesse o si potesse assegnare, e che comunque grandi, o comunque piccole si concepiscano, posson sempre concepirsi anche maggiori o minori. Esse sono quell' estremo limite, a cui le quantità ognor crescenti o decrescenti tendono continuamente, senza poter mai raggiungerlo e molto meno oltrepassarlo. Così sarebbe infinito l' ultimo termine della serie crescente 1, 2, 3, 4 ec., ed infinitesimo l' ultimo della decrescente 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ ec. E' pure infinitesimo un rotto che abbia un denominatore infinito, poichè diminuendo il valor del rotto a misura che cresce quello del denominatore (48), quando questo ecceda qualunque grandezza assegnabile e divenga infinito, l' altro dovrà trovarsi inferiore a qualunque piccolezza assegnabile e divenire infinitesimo. Per l' opposta ragione sarà infinito un rotto che abbia un denominatore infinitesimo; molto più poi se lo avrà nullo.

902. Son del pari infiniti di numero i punti che distinti di luogo gli uni dagli altri posson segnarsi sopra una linea o retta o curva, la quale perciò o piccola o grande che sia, potrà riguardarsi come l' aggregato di un numero infinito di punti. Sono infinite di numero le linee che l' une consecutivamente all' altre

posson segnarsi sopra una superficie, la quale perciò sarà come l'aggregato di un numero infinito di linee. Sono infinite le sezioni parallele, che possono praticarsi in un solido, che sarà dunque come l'aggregato totale delle superficie di qualunque sezione. Quindi il punto sarà l'infinitesima parte della linea, la linea l'infinitesima parte della superficie, e questa l'infinitesima parte del solido.

903. Per esprimere o rappresentar l'infinito si usa il segno o il carattere ∞. L'espressioni 2∞, 3∞, $a\infty$ significano l'infinito preso 2, 3, a volte; ∞^2, ∞^3, ∞^n significano i prodotti di due, di tre, di n infiniti, che si chiamano anche infiniti del *secondo*, del *terzo*, dell' *n^simo ordine*. Così una linea d'infinita lunghezza è, rapporto al numero dei punti che vi son contenuti, un infinito di second' ordine; q^∞ è la potenza infinita di q o l'ultimo termine della progressione infinita q, q^2, q^3 ec. $\frac{a}{\infty^2}, \frac{a}{\infty^3}, \frac{a}{\infty^n}$ sono infinitesimi del *secondo*, del *terzo*, dell' *n^simo* ordine.

904. Le quantità infinitesime di un ordine qualunque sono infinitamente più piccole di quelle dell' ordine precedente, e infinitamente più grandi di quelle dell' ordine seguente, e perciò sono infinite rapporto alle seconde, infinitesime rapporto alle prime. Ciò facilmente risulta dalla proporzione $\frac{a}{\infty^{n+1}} : \frac{a}{\infty^n} :: \frac{a}{\infty^n} : \frac{a}{\infty^{n-1}}$: Oppostamente gl' infiniti d' ordine superiore sono infinitamente più grandi di quelli d' ordine inferiore e viceversa, come egualmente le finite sono infinitesime rapporto alle infinite, e infinite rapporto alle infinitesime; infatti $\infty : a :: a : \frac{a^2}{\infty}$.

905. Le quantità poste in calcolo dall' algebra or-

dinaria essendo supposte sempre finite, e perciò sostanzialmente differenti dalle infinite e infinitesime, ne segue che i principj ammessi per quelle saranno almeno in qualche parte insufficienti per queste, e l'intervento degli infiniti o degli infinitesimi in un' equazione esigerà nuovi canoni, senza i quali non saremo certi di giungere a risultamenti esatti e rigorosi. Il che quanto sia vero chiaramente apparirà dagli esempj seguenti.

I. Sia la progressione geometrica decrescente $\frac{3}{10}$, $\frac{3}{10^2}$, $\frac{3}{10^3}$ ec. continuata fino all' infinito, e voglia tutta sommarsi. Avremo (328) $a=\frac{3}{10}$, $q=\frac{1}{10}$, $n=\infty$ ed $s=a\left(\frac{q^n-1}{q-1}\right)=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{10^\infty}\right)$, mentre, come è già noto (89), dovrebbe aversi semplicemente $s=\frac{1}{3}$.

II. Posti a, b due archi qualunque, abbiamo dalla trigonometria (651. 77ª) $\frac{sen(a+b)}{sen(a-b)}=\frac{tang\,a+tang\,b}{tang\,a-tang\,b}$. Sia frattanto $a=90°$, avremo (644) $sen(a+b)=cos\,b$, $sen(a-b)=cos\,b$, $tang\,a=\frac{sen\,a}{cos\,a}=\frac{1}{0}$(633. 4.°)$=\infty$ (901); d' onde $1=\frac{\infty+tang\,b}{\infty-tang\,b}=1+\frac{2tang\,b}{\infty-tang\,b}$ in luogo di $1=1$.

61 III. Nel circolo AMB abbiamo la tangente $MT=\frac{r}{r-x}\sqrt{(2rx-x^2)}=r\sqrt{\left(\left(\frac{r}{r-x}\right)^2-1\right)}$(536). Fatto $x=r$ deve aversi $MT=r\infty$ (633. 4.°), mentre la formula dà $MT=\sqrt{(r^4\infty^2-r^2)}$.

146 IV. Dal vertice A dell' iperbola AMQ si conduca AS normale all' asse AN prolungandola fino all' incontro in S con la tangente TM. I triangoli TAS, TPM daranno TP:AT::PM:AS, ossia (786)

$\frac{x^2-a^2}{x}:\frac{ax-a^2}{x}::\frac{b}{a}\sqrt{(x^2-a^2)}:\text{AS}=b\sqrt{\frac{x-a}{x+a}}$. Se si suppon- 146
ga x infinita, e che per conseguenza la tangente MT si converta nell' asintoto CR (788), avremo $\text{AS}=b\sqrt{\frac{\infty-a}{\infty+a}}$, mentre sappiamo che deve aversi semplicemente $\text{AS}=b$ (*ivi*).

V. Nell' istessa iperbola abbiamo $\text{AT}=a-\frac{a^2}{x}$ (786). Supposta $x=\infty$ si sa che deve risultarne $\text{AT}=\text{AC}=a$ (788), e frattanto l'equazione darebbe $\text{AT}=a-\frac{a^2}{\infty}$.

906. Or da questi esempj e da moltissimi altri che potremmo nel modo stesso esibire, apparisce 1.° che i risultamenti ottenuti con le regole ordinarie dell' algebra, e nei quali si trovano termini di valore finito congiunti a termini di valore infinito o infinitesimo, sono erronei; 2.° che per ridurgli al loro giusto valore *bisogna eliminare tutti gli infinitesimi che si trovano di seguito alle quantità finite, e le finite che si trovano di seguito alle infinite*: o che è lo stesso, *conviene istituire delle particolari equazioni tra le quantità finite nel primo caso, e tra le infinite nel secondo*. Applicando infatti questo principio agli addotti esempj, tutti i risultamenti divengon subito esatti.

907. Ma come potrebbe sempre, e con qualche ragione, dubitarsi della generalità di un principio, il quale non avesse altro appoggio, che esempj e prove particolari, per quanto queste fossero numerose, eccone una dimostrazione semplice e piana, dedotta dalle nozioni medesime che abbiamo date degl' infiniti e degl' infinitesimi (901). Sieno a, b due quantità finite ed α, β due quantità infinitesime, e si abbia l' equazione $a+\alpha=b+\beta$. Se non fosse $a=b$, potremmo sup-

porre $a = b \pm c$, valore che sostituito nell' equazione porterebbe a concludere $\beta - \alpha = \pm c$. Or perchè ciò sussistesse converrebbe che α e β non potessero esser minori di c; il che ripugnando al supposto che α e β sieno infinitesime (901), rende manifesto che non può esservi differenza alcuna fra a e b, ossia che deve aversi $a = b$. Lo stesso si dica se a, b fossero infinite ed α, β finite, o se quelle fossero infinite di un ordine superiore, queste d' un inferiore, o se quelle fossero infinitesime di un ordine inferiore, queste di un superiore: poichè in ciascuno di questi casi α e β sarebbero sempre infinitesime rapporto ad a, b (904).

908. E' però da avvertirsi 1.° che quantunque nell' equazione $a + \alpha = b + \beta$ debba supporsi $a = b$, non sempre potremo altresì concludere $\alpha = \beta$; poichè la differenza $\beta - \alpha$ fra β e α può sempre concepirsi minore di c senza che per questo sia zero. Così nell' analisi dei finiti per quanto da $am = an$ risulti in generale $m = n$, non ha luogo però questa medesima conseguenza quando sia $a = 0$, o che si abbia $0 \times m = 0 \times n$; come del pari da $b^0 = a^0$ (131) non può dedursi $b = a$, quantunque ciò venga dato dall' equazione più generale $b^m = a^m$. 2.° La soppressione delle quantità finite di faccia alle infinite non deve aver luogo quando sì l' une che l' altre faccian parte di un esponente: così $q^{\infty + 1}$ non può ridursi a q^{∞}; perchè in tal caso l' unità aggiunta all' infinito non indica somma, ma prodotto, e si ha $q^{\infty + 1} = q^{\infty} \times q$, espressione ben differente da q^{∞} (903).

909 Il principio che abbiamo sopra stabilito (906.2.°) è stato per lungo tempo assunto per base del calcolo *differenziale* di cui adesso entriamo a trattare, e noi pure seguitando il più gran numero dei Geometri, per tale lo assumeremo. L' apparente contradizione

che regna fra il medesimo e i canoni ordinarj delle equazioni (187), nasce dall' impossibilità di formarci un' idea giusta e completa dell' infinito e dell' infinitesimo; nè d' altronde deve muoverci a dubitare della di lui verità, dopo le prove che ne abbiamo arrecate e il ragionamento col quale l' abbiamo comprovato. Le matematiche son piene di simili enigmi, forse anche più inintelligibili, ed ai quali frattanto comecchè assistiti dall' appoggio dei raziocinj e dei fatti, niuno ardirebbe di contradire. La regola dei segni (118), quelle dei radicali irrazionali, e molto più quelle degli immaginarj (157) somministrano luminosi esempj di questo genere.

Leibnizio, che il primo arricchì l' analisi del principio, del quale parliamo, lo riguardò come assioma, sembrandogli troppo evidente che due quantità debbano prendersi per eguali, allorchè la lor differenza è minore di qualunque quantità immaginabile ed assegnabile; e poco o niente curando le speciose objezioni che gli venivano opposte, non pensò che a trar partito dalla prodigiosa fecondità del suo fortunato concetto, ed entrar coraggioso nel vasto campo di scoperte a cui mediante il medesimo si era aperta la più facile strada. *Eulero* che volle poscia ridurlo a teorema non fu molto felice nei suoi tentativi; ed anzi che diminuire, piuttosto contribuì ad accrescere le querele degli oppositori: talchè i più insigni fra i susseguenti Analisti giudicaron miglior partito di abbandonare il principio infinitesimale, e supplire con altri che fossero maggiormente al coperto dagli attacchi di tutte le metafisiche sottigliezze. Il metodo dei *limiti* e quello delle *derivazioni*, a questo proposito immaginati, riescirono applauditissimi, e lor si applaude tuttora: ma poichè quanto questi su-

peravano l' antico principio per parte dell' evidenza geometrica, altrettanto gli cedevano nella semplicità e nella facilità delle applicazioni, il canone Leibniziano fu perciò di nuovo proposto e raccomandato da quei medesimi che più faticato avevano per farlo abbandonare. Il merito di averlo in seguito posto nel più chiaro lume si deve a *Carnot*, che prendendo a sviluppare un' idea già prodotta da *La-Grange*, mostrò come la soppressione delle quantità infinitesime in faccia alle finite o di queste in faccia alle infinite non è un errore che si commetta, ma la compensazione di un errore già commesso ed involto nell' ipotesi stessa, d' onde sempre partiamo, qualunque volta si procede all' applicazione del principio di cui si tratta. Si vedano le di lui *riflessioni sulla metafisica del calcolo infinitesimale*.

Del resto determinandoci noi per questo principio, attesa specialmente la facilità di applicarlo, non intendiamo con ciò di dargli alcuna preferenza sugli altri, che avremo anzi cura di richiamare, qualunque volta occorra di convalidar maggiormente le più importanti proposizioni. Già abbiamo data a suo luogo un' idea dell' analisi derivata (390 - 393), altrettanto a tempo opportuno faremo del metodo dei limiti. Esortiamo poi vivamente i Giovani vogliosi di continuare nell' intrapresa carriera, a bene impadronirsi dell' uno e dell' altro metodo, ma specialmente del primo, che troveranno pienamente esposto e discusso nella *Teoria delle funzioni analitiche* di *La Grange*, e nelle *Lezioni sul calcolo delle funzioni*. Questo studio è reso in oggi necessario per l' intelligenza dei più moderni Scrittori, come lo studio del calcolo infinitesimale è indispensabile per chi vuole internarsi nelle opere luminose di *Eulero*, dei *Bernoulli*, di *La-Grange* stesso e di *La-Place*, e specialmente nelle due *Meccaniche Analitica* e *Celeste*, che tra le classiche avranno per lungo tempo il vanto di essere considerate per le più insigni.

ELEMENTI

DEL CALCOLO DIFFERENZIALE ED INTEGRALE

Fondamenti di questi due Calcoli

910. Le quantità si dividono in *costanti* ed in *variabili*: le costanti, che sogliono indicarsi con le prime lettere a, b, c ec. non crescono nè scemano; le variabili, che si esprimono con l' ultime x, y, z ec., crescono o scemano continuamente. Così il diametro del circolo, gli assi, i parametri delle curve sono quantità costanti, mentre le ascisse, le ordinate, le tangenti sono quantità variabili. La porzione, di cui una variabile x o y cresce o scema, si esprime con $\pm \delta x, \pm \delta y$ se è finita, con $\pm dx$, $\pm dy$ se è infinitesima, e si chiama nel 1.° caso *differenza finita*, nel 2.° *differenza infinitesima* o semplicemente *differenziale*; avendo luogo il $+$ se la variabile cresce, il $-$ se scema. Dunque δ o d non sono quantità, ma semplicemente segni, con cui s' indica il cangiamento finito o infinitesimo della variabile. E generalmente $\delta\phi(x)$, $\delta f(x;y)$, $d\phi(x)$, $df(x, y)$, ec. rappresentano, secondo il segno δ o d, la differenza finita o infinitesima di una funzione ϕ di x, o di una funzione f di x e di y ec., intendendosi per funzione di x, o di x e di y ec. un' espressione comunque composta di queste variabili e di costanti.

911. Due o più variabili fra le quali esistano delle equazioni, che ne fissino lo scambievol rapporto, diconsi *dipendenti* fra loro; tale è il caso delle coordinate nel circolo, ed in ogni altra curva. Allora variando l' una debbono necessariamente variare tutte l' altre, che ne dipendono: mentre, se sono *indipendenti*, niuna varierà per semplice effetto della variazione dell' altre.

É però da notarsi 1.° che l'equazioni di rapporto debbono esser sempre minori del numero delle variabili ; se lo eguagliassero, ciascuna avrebbe un valor determinato (194), per cui si cangerebbe in costante, 2.° che se si abbia una sola equazione di rapporto tra più di due variabili, una sola di esse, da fissarsi ad arbitrio, sarà dipendente dalle altre : le altre ne dipenderanno a vicenda, ma saranno indipendenti fra loro; 3.° in conseguenza in un sistema di m variabili ed n equazioni, supposto, come abbiamo stabilito, $m>n$, vi saranno $m-n$ variabili indipendenti : poiché per mezzo dell' eliminazione posson tali equazioni ridursi ad una sola con $m-n+1$ variabile.

187 912. Sia la curva CMH dell'equazione $y=\varphi(x)$ e con le coordinate $AB=x$, $AD=x'$, $AF=x''$, ec., $BC=y$, $DE=y'$, $FG=y''$, ec.; sarà $BD=\delta x$, $DF=\delta x'$, ec., $Ea=\delta y$, $Gb=\delta y'$, ec. Avremo dunque $AD=x'=x+\delta x$, $DE=y'=y+\delta y$, ec., e di qui $\delta x=x'-x$, $\delta y=y'-y$, onde 1.° *sottraendo dalla variabile cangiata il suo valore primitivo, ne risulta quello della sua differenza*.

913. Sarà inoltre $y'=\varphi(x')$, cioè $y+\delta y=\varphi(x+\delta x)$. Ma $y=\varphi(x)$, $\delta y=\delta\varphi(x)$, dunque $\delta\varphi(x)=\varphi(x+\delta x)-\varphi(x)$; perciò 2.° *per avere la differenza d' una funzione ad una sola variabile* x, *basta sostituirvi* x+δx *in luogo di* x, *e toglierne in seguito la funzione primitiva*.

914. Che se la funzione sia di più variabili, e si abbia $y=\varphi(u, x, z, \text{ec.})$, quantunque il cangiamento d' una sola variabile ne produca sempre uno nella funzione, il cangiamento totale della funzione o il suo passaggio da y ad y' dovrà necessariamente dipendere da quello di tutte le variabili insieme ; avremo in conseguenza $y'=\varphi(u', x', z', \text{ec.})$, cioè $y+\delta y=\varphi(u, x, z, \text{ec.})+\delta\varphi(u, x, z, \text{ec.})=\varphi(u+\delta u, x+\delta x, z+\delta z, \text{ec.})$, e $\delta\varphi(u, x, z, \text{ec.})=\varphi(u+\delta u, x+\delta x, z+\delta z, \text{ec.})-\varphi(u, x, z, \text{ec.})$; di qui 3.° *la differenza*

totale di una funzione a più variabili si ottiene aumentando ciascuna di esse della lor differenza particolare, e sottraendo in seguito la funzione primitiva.

915. Dunque $\delta(y+y'+y''+\text{ec.})=y+\delta y+y'+\delta y'+y''+\delta y''+\text{ec.}-(y+y'+y''+\text{ec.})=\delta y+\delta y'+\delta y''+\text{ec.}$; cioè 4.° *la differenza della somma di più variabili eguaglia la somma delle lor differenze*. Onde poiché $x'=x+\delta x$, $y'=y+\delta y$, sarà $\delta x'=\delta(x+\delta x)=\delta x+\delta\delta x$, e $\delta y'=\delta(y+\delta y)=\delta y+\delta\delta y$. Ora le espressioni $\delta\delta x$, $\delta\delta y$, che sogliono ancora scriversi $\delta^2 x$, $\delta^2 y$, si chiamano *differenze seconde*; $\delta^3 x$, $\delta^3 y$ sarebbero le *terze* ec., ove si osservi, che $\delta^2 x$ è molto diverso da δx^2, perchè $\delta^2 x$ è la seconda differenza di x, mentre δx^2 è il quadrato della prima δx. Ordinariamente, quando $y=\varphi(x)$, una delle differenze prime δx, δy
si riguarda come costante, supponendo per esempio 187
BD$=\delta x=$DF$=$FI; ma non potranno mai farsi costanti ambedue, poichè allora sarebbe il triangolo CaE$=$EbG, e la curva CG si supporrebbe una retta.

916. Infine sia IH$=y$, FG$='y$, DE$=''y$, BC$='''y$, ec., premettendo l'accento per indicare il regresso delle ordinate all' indietro: avremo H$c=\delta' y$, G$b=\delta'' y$, E$a=\delta''' y$ ec., onde $y-\delta' y='y$, $'y-\delta'' y=''y$, $''y-\delta''' y='''y$, ec., e perciò $y=\delta' y+'y=\delta' y+\delta'' y+''y=\delta' y+\delta'' y+\delta''' y+'''y=$ ec. $=\delta('y+''y+'''y+\text{ec.})+{}^{(n)}y$ (915); dal che si rileva 5.° che *supponendo* $^{(n)}$y$=0$, *cioè nullo il primo termine della serie costituita dai differenti valori di* y, *ciascun termine di questa serie, o in generale una funzione qualunque di* y, *è sempre la differenza della somma dei termini che la precedono.* Dunque lo spazio Hi, l'arco Hh ec., tutte funzioni di y come vedremo, son la differenza della somma degli spazi GI, EF, ec., o degli archi GH, EG, ec., ovvero di uno spazio qualunque CI, o di qualunque arco CH, ec.

917. Di questi teoremi che tutti egualmente si avverano delle differenze finite e dell' infinitesime, il 3.° e 4.° formano il principal fondamento del *Calcolo differenziale*, che ha per oggetto di determinare nei diversi casi particolari il valore assoluto della differenza di una funzione, se si tratti di differenze finite; o il suo rapporto con quello delle variabili, se si tratti di differenze infinitesime : il 5.° può dirsi la base del *Calcolo integrale*, in cui cercasi o la funzione, d' onde deriva una differenza data, o il rapporto della funzione alla variabile , quando è dato quello delle lor differenze. Nel seguito s' intenderanno meglio queste definizioni: ma come il calcolo, che suppone le differenze infinitesime , è sommamente più semplice , e di un uso più universale dell' altro che le suppone finite; noi ce ne occuperemo principalmente , riserbandoci a dare qualche saggio del secondo dopo aver parlato estesamente del primo, che lo facilita e gli fa strada; e usando il comune stile, intenderemo parlar soltanto di questo , quando adopreremo, senz' altro aggiunto, il termine *differenziare*. Intanto nel darne le regole supporremo le variabili sempre crescenti, e per conseguenza positive le differenze (910), quando altro non si avverta in contrario .

Prime regole dei due Calcoli

918. Ripresa la formula $y=\varphi(x)$ (912) , e cangiatovi x in $x+dx$ (913), si sviluppi $\varphi(x+dx)$ in serie ordinata per le potenze di dx, ponendo col solito metodo(380)$\varphi(x+dx)=P+Adx+Bdx^2+Cdx^3+$ ec. I coefficienti P, A, B, C ec. dovranno esser funzioni della sola x, senza contener dx, da cui saran perciò indipendenti ; diversamente non sarebbe ben

ordinata la serie per questa quantità. Dunque 1.° $P=\Phi(x)$ valore, che essendo vero nel caso di $dx=0$, attesa l'indipendenza di P da dx, deve verificarsi in ogni altro caso. In conseguenza $d\Phi(x)=(913)\Phi(x+dx)-\Phi(x)=Adx+Bdx^2+Cdx^3+$ec., e poichè in faccia al primo termine Adx svaniscono di lor natura tutti i seguenti (906. 2.°), avremo in fine $d\Phi(x)=Adx$, e $\frac{d\Phi(x)}{dx}=A$, espressioni generali del differenziale di una funzione $\Phi(x)$, e del suo rapporto a quello della variabile,

919. Dunque 2.° $A=\Phi'(x)$ (pongo Φ' per significare la diversità, che deve passare tra questa funzione e l'altra $\Phi(x)$, da cui essa deriva; ciò si avverta per tutti i casi simili), e perciò $d\Phi(x)=dx\Phi'(x)$, e $\frac{d\Phi(x)}{dx}=\Phi'(x)$, nuova forma delle precedenti equazioni che spesso è in uso. Ed intanto noteremo che A nelle prime, $\Phi'(x)$ nelle seconde, sogliono chiamarsi *Coefficienti differenziali*; e generalmente si dà questo nome a qualunque funzione finita, che moltiplica il differenziale di una variabile.

920. Due cose meritano qui osservazione: l'una che $\Phi'(x)$ corrisponde precisamente a ciò che nell' *analisi derivata* si chiamò *derivata prima* di $\Phi(x)$ (390); l'altra che indipendentemente dal considerare dx come infinitesima si ha sempre $\frac{d\Phi(x)}{dx}=A+Bdx+Cdx^2+$ec., e poichè quanto più diminuisce dx tanto più $\frac{d\Phi(x)}{dx}$ si approssima ad essere eguale ad A, dunque A o $\Phi'(x)$ è il *limite dei rapporti fra le differenze della funzione e quelle della variabile*. Questo limite, la derivata prima di una funzione e il coefficiente differenziale son dunque una cosa medesima sotto tre diverse denominazioni; e perciò le regole che daremo per la ricerca dei coefficienti, appartengono egualmente e alla

ricerca dei limiti e a quella delle derivate. Si avverta che noi intendiamo trovato il coefficiente differenziale, quando si é trovata la differenza della funzione, poichè quello si ha dal divider questa per la differenza della variabile.

921. Frattanto poichè Adx non è in somma che il secondo termine dello sviluppo di $\phi(x+dx)$, dunque *per differenziare una qualunque funzione* $\phi(x)$ *di una variabile* x, *vi si ponga* x+dx *in luogo di* x, *e sviluppata la nuova funzione per le potenze di* dx, *il secondo termine dello sviluppo*, *o quello ove* dx *è alla prima dimensione, sarà il differenziale cercato*. Ma questa regola nei diversi valori particolari di $\phi(x)$ è suscettibile di una più semplice enunciazione.

922. Cominciando dalle funzioni ad una sola variabile e monomie, sia in primo luogo $\phi(x)=\pm bx^n$; sarà $\phi(x+dx)=\pm b(x+dx)^n=(175)\pm bx^n\pm nbx^{n-1}dx\pm$ ec.; dunque $d(\pm bx^n)=(921)\pm bnx^{n-1}dx$, cioè *si differenzia una variabile a qualunque grado diminuendone di un' unità l' esponente, e moltiplicandola per il prodotto del suo differenziale nel coefficiente e nell' esponente primitivo*. Così $d(x^2)=2xdx$; $d(3x^5)=15x^4dx$; $d(-\frac{2}{3}x^6)=-4x^5dx$; $d(\sqrt[3]{3x^2})=d(3^{\frac{1}{3}}x^{\frac{2}{3}})=2.3^{-\frac{2}{3}}x^{-\frac{1}{3}}dx=\frac{2dx}{3\sqrt{9x}}$; $d(\frac{1}{x})=d(x^{-1})=-x^{-2}dx=-\frac{dx}{x^2}$.

923. Si osservi intanto 1.° che essendo $d(x^n)=nx^{n-1}dx$, avremo $\pm bd(x^n)=\pm bnx^{n-1}dx=(922)$ $d(\pm bx^n)$: cioè *il coefficiente costante della potenza può sempre portarsi fuori del segno differenziale e reciprocamente*. Sarà dunque $d(\pm bx)=\pm bdx$: perciò 2.° *se la potenza è del primo grado si differenzierà sosti-*

tuendo alla variabile il suo differenziale: infine poichè

$$d\left(\sqrt[m]{bx^n}\right)=b^{\frac{1}{m}}d\left(x^{\frac{n}{m}}\right)=\frac{n}{m}b^{\frac{1}{m}}x^{\frac{n}{m}-1}dx=\frac{n}{m}b^{\frac{1}{m}}x^{\frac{n}{m}-1}dx\times$$

$$\frac{b^{1-\frac{1}{m}}x^{n-\frac{n}{m}}}{b^{1-\frac{1}{m}}x^{n-\frac{n}{m}}}=\frac{nbx^{n-1}dx}{m\sqrt[m]{(bx^n)^{m-1}}}=\frac{d(bx^n)}{m\sqrt[m]{(bx^n)^{m-1}}}$$; dunque 3.° *il differenziale di un radicale del grado* m *può aversi anche più immediatamente dividendo il differenziale della quantità sotto il segno per il prodotto di* m *nella radice* m *di questa quantità alzata all' esponente* m—1.

924. Sia in secondo luogo $\phi(x)=lx$. Poichè $l(x+dx)=lx\left(1+\frac{dx}{x}\right)=$ (400. 1.°) $lx+l\left(1+\frac{dx}{x}\right)=lx+A\left(\frac{dx}{x}-\frac{1}{2}\frac{dx^2}{x^2}+\text{ec.}\right)$ (403), sarà dunque $d(lx)=\frac{Adx}{x}$, se il logaritmo è ordinario; e $d(lx)=\frac{dx}{x}$ se è iperbolico (406), come sempre supporremo nel seguito. Perciò *si differenzia un logaritmo dividendo per la quantità sotto il segno il suo differenziale*. Così $d(lx^n)=\frac{nx^{n-1}dx}{x^n}=\frac{ndx}{x}$. Parimente $d(l^nx)=$(922)$nl^{n-1}xd(lx)=\frac{n}{x}dxl^{n-1}x$; e infine $d(llx)=\frac{d(lx)}{lx}=\frac{dx}{xlx}$.

925. Intanto poichè $dx=xd(lx)$, e cangiato x in X funzione di x, si avrebbe egualmente $dX=Xd(lX)$, perciò *il differenziale di una variabile, o di una sua qualunque funzione, eguaglia il prodotto di essa nel differenziale del suo logaritmo*. Così $d(x^m)=x^md(lx^m)=\frac{mx^mdx}{x}=mx^{m-1}dx$, come trovammo (923). Dunque se in 3.° luogo sia $\phi(x)=a^{mx}$, avre-

mo $d(a^{mx})=a^{mx}d(la^{mx})=a^{mx}\times d(mxla)=ma^{mx}dxla$: e se a si cangi in e, numero il cui logaritmo iperbolico è l'unità (410), sarà $d(e^{mx})=me^{mx}dx$. Egualmente $d\left(e^{e^x}\right)=e^{e^x}d\left(le^{e^x}\right)=e^{e^x}d(e^x le)=e^{e^x}e^x dx$.

926. I differenziali di $sen\,x$ e $cos\,x$ si hanno più immediatamente senza le serie. Infatti poichè $d(sen\,x)=$ (913) $sen(x+dx)-sen\,x=$ (647.50.°) $2sen\frac{1}{2}dx\,cos\frac{1}{2}(2x+dx)$, e $d(cos\,x)=cos(x+dx)-cos\,x=$ (647. 52.°) $-2\,sen\frac{1}{2}dx\,sen\frac{1}{2}(2x+dx)$; sapendosi (906. 2.°) che $2x+dx=2x$, e (653) $sen\frac{1}{2}dx=\frac{1}{2}dx$, sarà dunque $d(sen\,x)=dx\,cos\,x$, $d(cos\,x)=-dx\,sen\,x$: perciò *si ha il differenziale del seno moltiplicando quello dell'arco per il coseno, e il differenziale del coseno moltiplicando quello dell'arco negativo per il seno.* Perciò $d(sen^m x)=mdx\,sen^{m-1}x\,cos\,x$; $d(cos\,mx)=-mdx\,sen\,mx$; $d(cos\,lx)=-d(lx)sen\,lx=-\frac{dx}{x}sen\,lx$ ec.

927. Ma per meglio mostrare come anche in questo caso i coefficienti differenziali niente diversificano dai noti limiti dei rapporti e dalle derivate prime delle funzioni (920), convien piuttosto dedurgli dalle serie; e ciò si farà osservando che (655.80°) $sen(x+dx)=x+dx-\frac{(x+dx)^3}{2.3}+\frac{(x+dx)^5}{2.3.4.5}-ec.=x-\frac{x^3}{2.3}+\frac{x^5}{2.3.4.5}-ec.+dx(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{2.3.4}-ec.)+ec.$, e $cos(x+dx)=$ (655. 81.ª) $1-\frac{(x+dx)^2}{2}+\frac{(x+dx)^4}{2.3.4}-ec.=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{2.3.4}-ec.-dx(x-\frac{x^3}{2.3}+\frac{x^5}{2.3.4.5}-ec.)+ec.$ Dunque (921) $d(sen\,x)=dx(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{2.3.4}-ec.)=$ (655. 81.ª) $dx\,cos\,x$, e $d(cos\,x)=-dx(x-\frac{x^3}{2.3}+\frac{x^5}{2.3.4.5}-ec.)=$ (655. 80.ª) $-dx\,sen\,x$.

Vero é che nel costruir le due serie qui richiamate e da cui si ha il seno e il coseno per l'arco, il valor di B coefficiente di x (655) fu determinato con un raziocinio, che quantunque consentaneo al principio dei limiti (920), è straniero per altro al rigor geometrico voluto nell'Analisi derivata. Quindi perché niente resti da desiderare anche per questa parte, e da ogni lato si manifesti l' identità dei risultamenti a cui porta ciascuno dei tre principj (909), e l' uso che indifferentemente e con egual sicurezza può farsi di ognuno di essi, apporremo qui l' ingegnoso artifizio immaginato da *La-Grange* per mostrare che non può aversi nè $B>1$, né $B<1$, e in conseguenza deve esser $B=1$. Si suppone ammesso che l' arco é maggiore del seno e minore della tangente. Sarà dunque 1.° $sen\,x<x$, e quindi $\frac{sen\,x}{x}<1$; 2.° $x<tang\,x$, ovvero $x<\frac{sen\,x}{\sqrt{(1-sen^2x)}}$ (639), d' onde $\frac{sen\,x}{x}>\frac{1}{\sqrt{(1+x^2)}}$ e a più forte ragione $\frac{sen\,x}{x}>\frac{1}{1+x^2}$ (48); ed anche $\frac{sen\,x}{x}>1-x^2$, giacché (135) $\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+\frac{x^4}{1+x^2}$ Ora é ben facile verificare che qualora nel costruir le serie del num. 655 si lasci indeterminata B, risulta

$$\frac{sen\,x}{x}=B-\frac{B^3x^2}{2.3}+\frac{B^5x^4}{2.3.4.5}-\frac{B^7x^6}{2.3.4.5.6.7}+\frac{B^9x^8}{2.3.4.5.6.7.8.9}-\text{ec.}$$

e poiché questa serie ha luogo per qualunque valore di x, si supponga x tale che si abbia $B^2x^2<1$; sarà $B^3x^2<B$, $B^5x^4<B^3x^2$, $B^7x^6<B^5x^4$ ec., onde ciascun termine della serie proverrà minore del suo precedente. Dunque la somma totale della serie sarà minore del primo termine B, e maggiore della somma dei due primi termini $B-\frac{B^3x^2}{2.3}$; quindi 1.° $B>\frac{sen\,x}{x}$, d'onde ancora $B>1-x^2$, per essersi veduto $\frac{sen\,x}{x}>1-x^2$; 2.° $B-\frac{B^2x^2}{2.3}<\frac{sen\,x}{x}$, e perciò $B-\frac{B^3x^2}{2.3}<1$ per essere $\frac{sen\,x}{x}<1$. Or siccome queste ineguaglianze debbono aver luogo qualunque siasi x, é assai fa-

cile concluderne che necessariamente $B=1$. Infatti se fosse $B=1+\omega$, la seconda ineguaglianza non sussisterebbe nel caso di $x^2=\frac{6\omega}{B^3}$; e se fosse $B=1-\omega$, non sussisterebbe la prima nel caso di $x^2=\omega$.

928. Ma sia $\phi(x)$ un prodotto di due o più funzioni X, X', X'' ec. di x, comunque diverse fra loro. Si avrà (925) $d(XX')=XX'd(lXX')$ = (400. 1.°) $XX'd(lX+lX')=$ (924) $X'dX+XdX'$. Si troverebbe egualmente $d(XX'X'')=X'X''dX+XX''dX'+XX'dX''$: onde *si differenzia un prodotto di più funzioni diverse della stessa variabile sommando quelli del differenziale di ciascheduna per tutte le altre*. Così $d(xlx\sqrt[4]{x^3})=dxlx\sqrt[4]{x^3}+\frac{3}{4}dxlx\sqrt[4]{x^3}+dx\sqrt[4]{x^3}$; $d(e^{3x}l^2x)=3e^{3x}dxl^2x+\frac{2e^{3x}dxlx}{x}$; $d(e^x sen^2 e^x cos x)=e^x dx sen^2 e^x cos x+2e^{2x}dx\, sen\, e^x cos\, x\, cos\, e^x\text{-}e^x dx\, sen^2 e^x sen\, x=e^x dx\, sen\, e^x\times(sen\, e^x cos\, x+2e^x cos\, e^x cos\, x-sen\, e^x sen\, x)$.

Con ciò si differenziano le espressioni x^x, x^{x^x} ec. Infatti $d(x^x)=(925)x^x d(lx^x)=x^x d(xlx)=x^x(dxlx+dx)=x^x dx(lx+1)$: ed egualmente $d(x^{x^x})=x^{x^x}d(lx^{x^x})=x^{x^x}d(x^x lx)=x^{x^x}(d(x^x(lx+x^x d(lx))=x^{x^x}(x^x dx(lx+1)lx+\frac{x^x dx}{x})=x^{x^x}x^x dx(l^2x+lx+\frac{1}{x})$.

929. Parimente $d\left(\frac{X}{X'}\right)=\frac{X}{X'}d\left(l\frac{X}{X'}\right)=\frac{X}{X'}d(lX\text{-}lX')=\frac{dX}{X'}-\frac{XdX'}{X'^2}=\frac{X'dX-XdX'}{X'^2}$: perciò *si differenzia un rotto prendendo il prodotto del denominatore per il differenziale del numeratore, sottraendone quello del numeratore per il differenziale del denominatore, e dividendo il resto per il quadrato del denominatore.* Così $d\left(\frac{3x^3}{lx}\right)=\frac{9x^2dxlx-3x^2dx}{l^2x}=\frac{3x^2dx(3lx-1)}{l^2x}$; $d\left(\frac{l^3x}{4\sqrt{x}}\right)=$

$\left(\left(\frac{12dx l^2 x\sqrt{x}}{x}\right)-\frac{2dx l^3 x}{\sqrt{x}}\right):16x=\frac{dx l^2 x(6-lx)}{8x\sqrt{x}}$; $d\left(\frac{lx}{\cos x}\right)=\frac{dx(\cos x+xlx\,\mathrm{sen}\,x)}{x\cos^2 x}$; *che se il numeratore è costante, sarà* $dX=0$, *e basterà allora dividere per il quadrato del denominatore il prodotto del suo differenziale negativo nel numeratore.* Così $d\left(\frac{1}{x}\right)=-\frac{dx}{x^2}$ come come già trovammo (922), e $d\left(\frac{1}{lx}\right)=-\frac{dx}{xl^2x}$.

930. Dal che si ha 1.° $d(\mathrm{tang}\,x)=d\left(\frac{\mathrm{sen}\,x}{\cos x}\right)=$ (926) $\frac{dx\cos^2 x+dx\,\mathrm{sen}^2 x}{\cos^2 x}=$ (656. 1.°) $\frac{dx}{\cos^2 x}$; 2.° $d(\cot x)=d\left(\frac{1}{\mathrm{tang}\,x}\right)=-\frac{dx}{\cos^2 x\,\mathrm{tang}^2 x}$ (637. 4.°) $-\frac{dx}{\mathrm{sen}^2}$; 3.° $d(\sec x)=d\left(\frac{1}{\cos x}\right)=\frac{dx\,\mathrm{tang}\,x}{\cos x}$; 4.° $d(\mathrm{cosec}\,x)=\left(\frac{1}{\mathrm{sen}\,x}\right)=-\frac{dx\cot x}{\mathrm{sen}\,x}$.

931. Onde se x é un arco qualunque e p il suo seno o coseno o tangente, ec., sarà 1.° $dx=d$ (*arco il cui seno è* p) $=\frac{d(\mathrm{sen}\,x)}{\cos x}=\frac{dp}{\sqrt{(1-p^2)}}$; 2.° $dx=d(\mathrm{arc.}\cos p)=-\frac{d(\cos x)}{\mathrm{sen}\,x}=-1\frac{\sqrt{(1-p^2)}}{dp}$;

3.° $dx=d(\mathrm{arc.}\,\mathrm{tang}\,p)=\cos^2 x\,d(\mathrm{tang}\,x)=\frac{d(\mathrm{tang}\,x)}{1+\mathrm{tang}^2 x}=\frac{dp}{1+p^2}$; 4.° $dx=d(\mathrm{arc.}\cot p)=-\mathrm{sen}^2 x.d(\cot x)=-\frac{d(\cot x)}{1+\cot^2 x}=-\frac{dp}{1+p^2}$;

5.° $dx=d(\mathrm{arc.}\sec p)=\frac{\cos x.d(\sec x)}{\mathrm{tang}\,x'}=\frac{d(\sec x)}{\sec x\sqrt{(\sec^2 x-1)}}=\frac{dp}{p\sqrt{(p^2-1)}}$; 6.° $dx=d(\mathrm{arc.}\,\mathrm{cosec}\,p)=-\frac{\mathrm{sen}\,x.d(\mathrm{cosec}\,x)}{\cot x}=-\frac{d(\mathrm{cosec}\,x)}{\mathrm{cosec}\,x\sqrt{(\mathrm{cosec}^2 x-1)}}=-\frac{dp}{p\sqrt{(p^2-1)}}$; e poichè $d(\mathrm{sen}\,v.x)=d(1-\cos x)=dx\,\mathrm{sen}\,x$, e $d(\cos v.x)=d(1-\mathrm{sen}\,x)=-dx\cos x$, sarà di più 7.° $dx=d(\mathrm{arc.}\,\mathrm{sen}\,v.p)=\frac{d(\mathrm{sen}\,v.x)}{\mathrm{sen}\,x}=\frac{dp}{\sqrt{(2p-p^2)}}$; 8.° $dx=d(\mathrm{arc.}\cos v.p)=-\frac{d(\cos v.x)}{\cos x}=-\frac{dp}{\sqrt{(2p-p^2)}}$.

932. Riguardo alle funzioni polinomie, composte cioè di più termini non riuniti nè sotto un comune esponente, nè sotto un comun segno logaritmico o trigonometrico, rappresentando con y, y', y'' ec. questi termini, onde sia $\varphi(x)=y+y'+y''+$ec., abbiamo già veduto (915) che sarà $d\varphi(x)=dy+dy'+dy''+$ ec.; cioè *la differenza totale della funzione eguaglierà la somma delle differenze particolari di ciascun dei suoi termini*. Che se tra questi ve ne sieno dei costanti, sarà nulla la lor differenza, e non ne resterà traccia alcuna nel differenziale; osservazione di gran conseguenza. Così $d(a+bx^2+cx^3)=2bxdx+3cx^2dx$; $d(2+l\,sen\,x+tang^2 l^3x)=dx\cot x+\frac{6l^2x\,tang\,l^3xdx}{x\cos^2 l^3x}$; $d(a\pm bx^m)=\pm bmx^{m-1}dx$.

933. Che se tutto intero un polinomio sia elevato ad una potenza, o compreso sotto un logaritmo o una funzione di circolo; poichè allora rappresenta un monomio, si tratterà come tale considerando a guisa di semplice variabile la quantità sotto il segno. Così $d(a\pm bx^m)^n=(922)\,n(a\pm bx^m)^{n-1}d(\pm bx^m)=(932)\pm bmnx^{m-1}dx(a\pm bx^m)^{n-1}$; $d(\sqrt{(a+bx+cx^2)})=(923\ 3.°)\ \frac{d(a+bx+cx^2)}{2\sqrt{(a+bx+cx^2)}}=(932)\frac{bdx+2cxdx}{2\sqrt{(a+bx+cx^2)}}$; $d\left(\frac{1}{x+\sqrt{(a^2-x^2)}}\right)=(929)-\frac{d(x+\sqrt{(a^2-x^2)})}{(x+\sqrt{(a^2-x^2)})^2}=\frac{dx(x-\sqrt{(a^2-x^2)})}{(x+\sqrt{(a^2-x^2)})^2\sqrt{(a^2-x^2)}}=\frac{dx(x-\sqrt{(a^2-x^2)})^3}{(2x^2-a^2)^3\sqrt{(a^2-x^2)}}$; $d(l(x^2+sen\,x^3-\sqrt{(3+lx)}))=(924)\ \frac{d(x^2+sen\,x^3-\sqrt{(3+lx)})}{x^2+sen\,x^3-\sqrt{(3+lx)}}=\frac{2x^2dx\sqrt{(3+lx)}(2+3x\cos x^3)-dx}{2x(x^2+sen\,x^3-\sqrt{(3+lx)})\sqrt{(3+lx)}}$.

934. Infine poichè $d\varphi(x)=dx\varphi'(x)$ (919), sarà ancora $d\varphi(X)=dX\varphi'(X)$, differenziale di $\varphi(X)$, purchè vi si ponga il valore di dX ottenuto con le regole precedenti. Così $d\varphi(x^2)=d(x^2)\varphi'(x^2)=2xdx\varphi'(x^2)$;

$d\varphi(a^2-x^2)=d(a^2-x^2)\varphi'(a^2-x^2)=-2xdx\varphi'(a^2-x^2)$;

$d\varphi\left(e^{m\sqrt[n]{x}}\right)=d\left(e^{m\sqrt[n]{x}}\right)\varphi'\left(e^{m\sqrt[n]{x}}\right)=\dfrac{me^{m\sqrt[n]{x}}dx}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}\cdot\varphi'\left(e^{m\sqrt[n]{x}}\right)$.

935. I differenziali degli ordini superiori non ammettono difficoltà. Quelli del secondo si deducono dai differenziali del primo, trattandogli come quantità finite, e considerandovi dx come una funzione della variabile x. Nel modo stesso si deducono quei del terzo da quei del secondo, e così successivamente. Sia per esempio $y=x^n$ e per conseguenza $dy=nx^{n-1}dx$. Avremo dunque $d^2y=$(928)$n(n-1)x^{n-2}dx^2+nx^{n-1}d^2x$; $d^3y=n(n-1)(n-2)x^{n-3}dx^3+3n(n-1)x^{n-2}dxd^2x+nx^{n-1}d^3x$, ec. Sia più in generale $y=\varphi(x)$, onde (919) $dy=dx\varphi'(x)$ sarà $d^2y=dx^2\varphi''(x)+d^2x\varphi'(x)$; $d^3y=dx^3\varphi'''(x)+3dxd^2x\varphi''(x)+d^3x\varphi'(x)$, ec.

936. Ma se dx è costante (915), d^2x, d^3x, ec. saranno nulle, ed allora per $y=x^n$, avremo $d^2y=n(n-1)x^{n-2}dx^2$, $d^3y=n(n-1)(n-2)x^{n-3}dx^3$, e $d^ny=n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots\ldots.3.2.1dx^n$; per $y=\varphi(x)$ sarà $d^2y=dx^2\varphi''(x)$, $d^3y=dx^3\varphi'''(x)$, e $d^ny=dx^n\varphi^{(n)}(x)$. Dunque $\dfrac{d^ny}{dx^n}\left(=\dfrac{d^n\varphi(x)}{dx^n}\right)=\varphi^{(n)}(x)$ quantità finita: onde d^ny o $d^n\varphi(x)$ e dx^n sono quantità omogenee e di uno stesso ordine infinitesimale (903). Ma si passi ormai alle funzioni di più variabili.

937. Già sappiamo che se $u=\varphi(x, y, z$, ec.), si ha $du=\varphi(x+dx, y+dy, z+dz$, ec.)$-\varphi(x, y, z$, ec.) (914). Si sviluppi $\varphi(x+dx, y+dy, z+dz$, ec.) in serie ordinata per le potenze e per i prodotti di dx, dy, dz, ec., cioè si ponga $\varphi(x+dx, y+dy, z+dz$, ec.)$=P+Adx+Bdy+Cdz+$ec.$+H$, rappresentando con H tutti i termini dello sviluppo, ove le differenze dx, dy, dz, ec. formano delle dimensioni superio-

ri alla prima. I coefficienti P, A, B, C, ec. dovranno al solito (918) esser funzioni delle sole x, y, z, ec. e affatto indipendenti da dx, dy, dz, ec. Inoltre sarà $P=\phi(x, y, z, \text{ec.})$, valore che si ha nel caso di tutte le differenze eguali a zero, e che per l'indipendenza di P dalle medesime, deve in ogni altro caso esser vero (918). Dunque $\phi(x+dx, y+dy, z+dz, \text{ec.})-\phi(x, y, z, \text{ec.})=du=Adx+Bdy+Cdz+\text{ec.}+H$; e poichè H svanisce in faccia agli altri termini di dimensione ipoteticamente minore, sarà infine $du=d\phi(x, y, z, \text{ec.})=Adx+Bdy+Cdz+\text{ec.}$ espressione generale del differenziale di una funzione a più variabili.

938. Ora Adx, Bdy, Cdz, ec. sono i differenziali che si avrebbero da $\phi(x, y, z, \text{ec.})$, se fossero state variabili prima la sola x, poi la sola y, in seguito la sola z, ec.; dunque *si differenzia una funzione di più variabili prendendone successivamente il differenziale per rapporto a ciascuna variabile, come se fosse unica nella funzione e le altre fossero altrettante costanti: e l'aggregato dei differenziali, che così si otterranno, sarà il differenziale cercato*. Così se $u=a+bx+cy+gz$, sarà bdx il differenziale parziale per x, cdy quello per y, gdz quello per z, e $du=bdx+cdy+gdz$: onde *si differenzierà una funzione di variabili al primo grado eliminandone i termini costanti, e sostituendo a ciascuna variabile il suo differenziale.*

Se $u=xy$, saranno ydx, xdy i due differenziali per x e per y, e $du=ydx+xdy$.

Se $u=ax^2 \operatorname{sen} y \sqrt{(1-xy)}$, avremo (928) $2axdx \times \operatorname{sen} y \sqrt{(1-xy)} - \frac{ayx^2 dx \operatorname{sen} y}{2\sqrt{(1-xy)}}$ differenziale per x, e $ax^2 dy \cos y \sqrt{(1-xy)} - \frac{ax^3 dy \operatorname{sen} y}{2\sqrt{(1-xy)}}$ differenziale per y;

onde $du = ax\sqrt{(1-xy)}(2dx\,\mathrm{sen}\,y + xdy\cos y) - \frac{ax^2\,\mathrm{sen}\,y}{2\sqrt{(1-xy)}}(ydx+xdy)$.

939. Ma in questo ed in tutti i casi consimili può procedersi anche più facilmente, osservando che $du =$ (925) $ud(lu) = ax^2\,\mathrm{sen}\,y\sqrt{(1-xy)}\,d(la + 2lx + l\,\mathrm{sen}\,y + \frac{1}{2}l(1-xy))$: onde $ax^2\,\mathrm{sen}\,y\sqrt{(1-xy)}\left(\frac{2dx}{x} - \frac{ydx}{2(1-xy)}\right)$ è il differenziale per x, $ax^2\,\mathrm{sen}\,y\sqrt{(1-xy)}\left\{dy\cot y - \frac{xdy}{2(1-xy)}\right\}$ è quello per y; quindi $du = ax^2\,\mathrm{sen}\,y\sqrt{(1-xy)}\left(\frac{2dx}{x} + dy\cot y - \frac{xdy+ydx}{2(1-xy)}\right)$, espressione che facilmente riducesi alla precedente.

940. Che se $u = \frac{F}{f}, = F\times f, = F\times f\times \Psi$, ec., essendo F, f, Ψ, ec. funzioni o delle stesse o di diverse variabili, sarà sempre nel primo caso $du = \frac{F}{f}d\left(l\frac{F}{f}\right) = \frac{fdF - Fdf}{f^2}$; nel secondo $du = F\times f\,dl(F\times f) = fdF + Fdf$, e così nel terzo $du = f\times\Psi dF + F\times\Psi df + F\times f d\Psi$: onde per i prodotti e frazioni a più variabili potranno aver luogo ancora gli stessi metodi di differenziazione già dati, per le frazioni e i prodotti ad una variabile sola (928. 929). Così $d\frac{x^2z}{\sqrt{(1-x^2y)}} = \frac{\sqrt{(1-x^2y)}\,d(x^2z) - x^2zd(\sqrt{(1-x^2y)})}{1-x^2y} = \frac{2xzdx + x^2dz}{\sqrt{(1-x^2y)}} + \frac{2x^3zydx + x^4zdy}{2\sqrt{(1-x^2y)^3}}$.

941. Infine se $u = \Phi(F)$, sarà $du = dF\Phi'(F)$, e dovrà porsi il valore di dF ottenuto coi metodi precedenti: così per $u = \Phi(x^2 + 3ylx)$ si avrà $du = d(x^2 + 3ylx)\Phi'(x^2+3ylx) = (2xdx + \frac{3ydx}{x} + 3dylx)\Phi'(x^2+3ylx)$. Che se $u = \Phi(F, f)$, il differenziale precedente si cangerà in $du = d(F, f)\Phi'(F, f)$ ec.

Del resto oltre le già accennate, molte altre vie si conoscono più o meno pronte, che conducono con sicurezza a buoni risultamenti : ma la pratica da se stessa le insegnerà, senza che ce ne occupiamo noi di vantaggio.

942. Ritorneremo piuttosto al metodo generale, e avvertiremo, che come du rappresenta la differenza totale di u, così secondo l'uso più universalmente accettato $\left(\frac{du}{dx}\right)dx$, $\left(\frac{du}{dy}\right)dy$, $\left(\frac{du}{dz}\right)dz$ ec. ne rappresentano i differenziali parziali per x, y, z ec. sebbene alcuni, stimando difettose queste espressioni, scrivano piuttosto $\frac{du}{dx}dx$, $\frac{du}{dy}dy$, $\frac{du}{dz}dz$, ec. Noi ci atterremo alle prime, e richiamando lo stabilito principio (937) avremo per prima conseguenza $du = \left(\frac{du}{dx}\right)dx + \left(\frac{du}{dy}\right)dy + \left(\frac{du}{dz}\right)dz +$ ec. altra importante espressione del differenziale di una funzione a più variabili. Secondariamente se in u non sia che la sola x, la differenza parziale per questa variabile eguaglierà la totale della funzione, e si avrà $du = \left(\frac{du}{dx}\right)dx$, terza maniera di esprimer generalmente il differenziale di una funzione ad una sola variabile.

943. Come $\left(\frac{du}{dx}\right)dx$ rappresenta la funzione u differenziata una volta parzialmente per x, così $\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)dx^2$ rappresenta la funzione u differenziata due volte e sempre parzialmente per x; $\left(\frac{d^2u}{dxdy}\right)dxdy$, $\left(\frac{d^2u}{dydx}\right)dydx$ il differenziale di u preso per x, poi per y, oppure per y, poi per x; ed in generale $\left(\frac{d^{m+n+p}u}{dx^m dy^n dz^p}\right)dx^m dy^n dz^p$ il differenziale di u preso m volte per x, poi n volte per y, e quindi p volte per z; $\left(\frac{d^2u}{dx}\right)dx$, $\left(\frac{d^2u}{dy}\right)dy$ i differenziali di du per x o per y; $\left(\frac{d(Adu)}{dx^2}\right)dx$ il differenziale di u per x diviso per dx, quindi moltiplicato

per A, e poi differenziato per x, ec. Frattanto si avverta 1.° che dal confronto delle due espressioni di du (937. 942) avendosi $\left(\frac{du}{dx}\right)=A$, $\left(\frac{du}{dy}\right)=B$, $\left(\frac{du}{dz}\right)=C$ ec., anche i coefficienti differenziali parziali $\left(\frac{du}{dx}\right)$, $\left(\frac{du}{dy}\right)$, $\left(\frac{du}{dz}\right)$, ec. sono quantità finite (937), né differiscono dai quozienti egualmente finiti (936) $\frac{du}{dx}$, $\frac{du}{dy}$, $\frac{du}{dz}$, ec., se non perché il differenziale du vi si intende preso soltanto rapporto alla variabile del denominatore: il che si avvera egualmente di $\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)=\left(\frac{dA}{dx}\right)$, di $\left(\frac{d^2u}{dxdy}\right)=\left(\frac{dA}{dy}\right)$, di $\left(\frac{d^2u}{dydx}\right)=\left(\frac{dB}{dx}\right)$, ec. 2.° Se $u=\phi(x,y,z)$, siccome $du=\phi(x+dx,\ y+dy,\ z+dz)-u$, sarà 1.ª $\left(\frac{du}{dx}\right)dx=\phi(x+dx,y,z)-u$; 2.ª $\left(\frac{du}{dy}\right)dy=\phi(x,\ y+dy,\ z)-u$; 3.ª $\left(\frac{du}{dz}\right)dz=\phi(x,\ y,\ z+dz)-u$, ec., giacché nella 1.ª si considera variabile la sola x, nella 2.ª la sola y, nella 3.ª la sola z, e costanti tutte le altre quantità. Dunque se la 1.ª, la 3.ª si differenziano per y, la 2.ª, la 3.ª per x, la 1.ª, la 2.ª per z, avremo con gli stessi principj $\left(\frac{d^2u}{dxdy}\right)dxdy=$
$\phi(x+dx,\ y+dy,\ z)-\left(u+\left(\frac{du}{dy}\right)dy\right)-\left(\frac{du}{dx}\right)dx$; $\left(\frac{d^2u}{dzdy}\right)dzdy=$
$\phi(x,\ y+dy,\ z+dz)-\left(u+\left(\frac{du}{dy}\right)dy\right)-\left(\frac{du}{dz}\right)dz$; $\left(\frac{d^2u}{dydx}\right)dydx=$
$\phi(x+dx,\ y+dy,\ z)-\left(u+\left(\frac{du}{dx}\right)dx\right)-\left(\frac{du}{dy}\right)dy$; $\left(\frac{d^2u}{dzdx}\right)dzdx=$
$\phi(x+dx,\ y,\ z+dz)-\left(u+\left(\frac{du}{dx}\right)dx\right)-\left(\frac{du}{dz}\right)dz$; $\left(\frac{d^2u}{dxdz}\right)dxdz=$
$\phi(x+dx,\ y,\ z+dz)-\left(u+\left(\frac{du}{dz}\right)dz\right)-\left(\frac{du}{dx}\right)dx$; $\left(\frac{d^2u}{dydz}\right)dydz=$
$\phi(x,\ y+dy,\ z+dz)-\left(u+\left(\frac{du}{dz}\right)dz\right)-\left(\frac{du}{dy}\right)dy$, ec. E perciò

$\left(\frac{d^2u}{dxdy}\right)=\left(\frac{d^2u}{dydx}\right)$, $\left(\frac{d^2u}{dxdz}\right)=\left(\frac{d^2u}{dzdx}\right)$, $\left(\frac{d^2u}{dydz}\right)=\left(\frac{d^2u}{dzdy}\right)$,
ossia $\left(\frac{dA}{dy}\right)=\left(\frac{dB}{dx}\right)$, $\left(\frac{dA}{dz}\right)=\left(\frac{dC}{dx}\right)$, $\left(\frac{dB}{dz}\right)=\left(\frac{dC}{dy}\right)$, equazioni di gran conseguenza nel calcolo integrale.

944. Applichiamole per ora a determinar più precisamente, di come si fece (941), il differenziale secondo di $u=\varphi(x, y)$. Poiché per il primo si ha $du=Adx+Bdy$ (937), differenziando dunque prima per x, poi per y, e rammentandoci che A, B sono nel nostro caso funzioni di x e di y (937), avremo $\left(\frac{d^2u}{dx}\right)dx=\left(\frac{dA}{dx}\right)dx^2+Ad^2x+\left(\frac{dB}{dx}\right)dxdy$; $\left(\frac{d^2u}{dy}\right)dy=\left(\frac{dA}{dy}\right)dydx+\left(\frac{dB}{dy}\right)dy^2+Bd^2y$: onde $d^2u=\left(\frac{dA}{dx}\right)dx^2+Ad^2x+2\left(\frac{dA}{dy}\right)dydx+\left(\frac{dB}{dy}\right)dy^2+Bd^2y=$ (943) $\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)dx^2+\left(\frac{du}{dx}\right)d^2x+2\left(\frac{d^2u}{dxdy}\right)dxdy+\left(\frac{d^2u}{dy^2}\right)dy^2+\left(\frac{du}{dy}\right)d^2y$. Se dx è costante, mancherà il termine $\left(\frac{du}{dx}\right)d^2x$; e se u sia funzione della sola x, resterà $d^2u=\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)dx^2+\left(\frac{du}{dx}\right)d^2x$, nuova importante espressione del differenziale secondo della funzione $\varphi(x)$.

945. Da quanto abbiamo detto facilmente si apprenderanno le prime regole del calcolo integrale, che secondo la definizione data (917) è precisamente l'opposto del differenziale, nel modo che la divisione lo è della moltiplicazione: ma si avverta primieramente, che come nel calcolo differenziale si premette il segno d alla quantità che vuol differenziarsi, così nell'integrale premettesi il segno $\int$, che chiamasi *somma*, avanti alla differenza che vuol integrarsi, o da cui si vuol rimontare all'espressione primitiva, d'onde la differenza è derivata: quindi $\int dx$, $\int nx^{n-1}dx$ vogliono significare quelle quantità di cui dx, $nx^{n-1}dx$ son le differenze.

946. Inoltre poichè dx è egualmente differenziale di x, di $x+a$, $x+b$, ec. (932), non si potrà concludere generalmente $\int dx=x$: ma fatta l' integrazione dovremo sempre aggiungere una costante indeterminata C, atta a rappresentar tutti i termini costanti che la differenziazione può aver fatti svanire. Fra poco faremo sentir meglio la necessità e l' uso di quest' aggiunta: e intanto noteremo 1.° che può darsi alla costante una forma che l' assomigli agli altri termini; poichè se per esempio nell' equazione $ly=lx+C$, sia b il valor di x che rende $ly=0$, sarà $0=lb+C$, e $C=-lb$; 2.° che mentre la costante resta indeterminata, è indeterminato altresì il suo prodotto e il suo quoziente per qualunque altra costante nota, cosicchè può farsi $bC=C$, $\frac{C}{b}=C$.

L' integrale accresciuto della sua costante si chiama *completo*, senza la costante si dice *particolare*. E come la costante può avere infiniti valori, così l' integrale particolare può differire in infinite maniere dal completo. Dicesi ancora particolare quell' integrale, in cui si sia dato alla costante un valore determinato; siccome dicesi *arbitraria* la costante nell'integrale completo, ove non ha avuto valore alcuno.

947. Infine se una differenziazione non sia eseguita, ma soltanto accennata, mediante l' inclusione della quantità da differenziarsi sotto il segno differenziale, basterà per l' integrazione porre la quantità fuori del segno, con l' aggiunta della costante: così l' integrale di $d(\sqrt{(a^2-x^2)})$ sarà $\sqrt{(a^2-x^2)}+C$, il che è evidente. Dunque $\int bdx=$(923. 1.°)$\int d(bx)=bx+C$; ma da $\int dx=x+C$ si ha egualmente $b\int dx=bx+bC=bx+C$ (946), perciò 1.° $\int bdx=b\int dx$, onde il coefficiente costante del differenziale può ad arbitrio premettersi al segno integrale. Di più $\int dy+\int dy'+\int dy''+$ ec. $=y+y'+y''+$ ec. $+C=\int d(y+y'+y''+$ ec. $+C)=$

(915) $\int(dy+dy'+dy''+\text{ec.})$, perciò 2.° *l' integrale di un differenziale polinomio eguaglia la somma degli integrali di ciascun termine*.

948. Dopo tutto ciò avremo 1.° $\int(adx+bdy+cdz+\text{ec.})=ax+by+cz+\text{ec.}+C$; onde *un polinomio della prima dimensione, e composto di puri differenziali, si integra sostituendo a questi le loro variabili*; 2.° $\int bnx^{n-1}dx=$ (947 1.°) $b\int nx^{n-1}dx=$ (922) bx^n+C. In conseguenza fatto $n=m+1$ si troverà $b\int x^m dx=\frac{bx^{m+1}+C}{m+1}=\frac{bx^{m+1}}{m+1}+C$: dunque *si integra un differenziale monomio, e di una sola variabile, aumentandone di un' unità l' esponente, e dividendola per il prodotto dell' esponente accresciuto nel di lei differenziale*. Così $\int x^5dx=\frac{x^6}{6}+C$; $\int 3x^7dx=\frac{3x^8}{8}+C$; $\int\frac{dx}{x^2}=\int x^{-2}dx=\frac{x^{-1}}{-1}+C=-\frac{1}{x}+C$; $\int b\sqrt[n]{x^m}dx=b\int x^{\frac{m}{n}}dx=\frac{bnx^{\frac{m+n}{n}}}{n+m}+C$. Si eccettui $\int\frac{dx}{x}=$ (924) $\int d(lx)=lx+lC=lCx$; 3.° $m\log a\int a^{mx}dx=\int ma^{mx}dx\log a=$ (925) $\int d(a^{mx})=a^{mx}+C$: onde $\int a^{mx}dx=\frac{a^{mx}}{m\log a}+C$, e $\int e^{mx}dx=\frac{1}{m}e^{mx}+C$; 4.° $\int dx\cos x=$ (926) $\text{sen}\,x+C$; $\int dx\,\text{sen}\,x=-\cos x+C$; $\int\frac{dx}{\cos^2x}=$ (930) $\text{tang}\,x+C$, ec.

949. L' integrale di $\int ax^{n-1}dx(b+x^n)^m$ si ha ponendo $b+x^n=z$, e perciò $nx^{n-1}dx=dz$; d' onde $\int ax^{n-1}dx(b+x^n)^m=\frac{a}{n}\int z^m dz=$ (948.2.°) $\frac{a}{n(m+1)}z^{m+1}+C=\frac{a(b+x^n)^{m+1}}{n(m+1)}+C$, ec.

950. In generale $\int x^n dx(a+bx^m)^r$ può aversi in tre casi: 1.° se r è numero intero e positivo; poichè sviluppando il differenziale e integrandone ciascun termine, si ha $\int(a^r x^n dx + ra^{r-1}bx^{m+n}dx + \text{ec.}) = C + \frac{a^r x^{n+1}}{n+1} + \frac{ra^{r-1}bx^{m+n+1}}{m+n+1} + \text{ec.}$, espressione finita nel nostro caso (175): 2.° se $\frac{n+1}{m} - 1 = c$, ossia $n = m(c+1)-1$, essendo c zero, o intero positivo; poichè fatto $a+bx^m = z$, onde $x^m = \frac{z-a}{b}$, $x^{m-1}dx = \frac{dz}{mb}$, $x^{mc} = \frac{(z-a)^c}{b^c}$, $x^{mc+m-1}dx = \frac{(z-a)^c dz}{mb^{c+1}}$, verrà $\int x^n dx(a+bx^m)^r = \frac{1}{mb^{c+1}}\int z^r dz(z-a)^c$, che sviluppato s'integrerà (1.°): 3.° se $-\frac{n+1}{m} - r = c$, ossia $n = -m(c+r)-1$, essendo c intero positivo; poichè $x^n dx(a+bx^m)^r = x^n x^{mr} dx\left(\frac{a+bx^m}{x^m}\right)^r = x^{n+mr}dx(b+ax^{-m})^r$, e fatto $b+ax^{-m} = z$, onde $x^{-m} = \frac{z-b}{a}$, $x^{-m-1}dx = \frac{dz}{-ma}$, $x^{-1}dx = \frac{dz}{-m(z-b)}$, verrà $\int x^{n+mr}dx(b+ax^{-m})^r = \frac{-1}{ma^c}\int z^r dz(z-b)^{c-1}$: così $\int x^{-2}dx(a+x^3)^{-\frac{5}{3}}$ dà $n=-2$, $b=1$, $m=3$, $r=\frac{-5}{3}$, $n+mr=-7=-3c-1$, onde $c=2$; quindi $\frac{-1}{3a^2}\int\left(z^{-\frac{2}{3}}dz - z^{-\frac{5}{3}}dz\right) = \frac{2z+1}{-2a^2 z^{\frac{2}{3}}} = \frac{3x^3+2a}{-2a^2 x\sqrt[3]{(a+x^3)^2}}$.

951. Se r nel primo caso, o c nel secondo e terzo risultino interi negativi, i differenziali da integrarsi prenderanno la forma di frazioni con denominatore razionale, e s' integreranno col metodo che insegneremo a suo luogo. Non verificandosi alcuna delle precedenti condizioni converrà, siccome pur mostreremo, cangiar le forme del differenziale proposto in una di quelle già incontrate al num. 931, i cui integrali son visibilmente archi di circolo che hanno o per seno o per coseno o per tangente ec. la variabile.

952. Infine $\int xdy+\int ydx=\int(xdy+ydx)=(938)$ $xy+C$, e di qui ancora $\int xdy=xy-\int ydx$.

Altre Regole del Calcolo differenziale

Trasformazione dei differenziali, e differenziazione delle equazioni

953. Sia $u=\Phi(x, y, z, \text{ec.})$ funzione di quante si voglia variabili x, y, z, ec. funzioni esse pure di altre variabili r, θ, π, ec., e voglian trasformarsi i differenziali parziali $\left(\frac{du}{dx}\right)dx$, $\left(\frac{du}{dy}\right)dy$, $\left(\frac{du}{dz}\right)dz$, ec., o semplicemente i lor coefficienti $\left(\frac{du}{dx}\right)$, $\left(\frac{du}{dy}\right)$, $\left(\frac{du}{dz}\right)$, ec., in altri dati per le nuove variabili r, θ, π, ec. La dipendenza tra le prime e le seconde variabili darà $u=\Phi(r, \theta, \pi, \text{ec})$, e (942) $du=\left(\frac{du}{dr}\right)dr+\left(\frac{du}{d\theta}\right)d\theta+\left(\frac{du}{d\pi}\right)d\pi+$ ec. Inoltre r, θ, π, ec. saranno reciprocamente funzioni di x, y, z, ec; perciò $dr=\left(\frac{dr}{dx}\right)dx+\left(\frac{dr}{dy}\right)dy+\left(\frac{dr}{dz}\right)dz+$ec., $d\theta=\left(\frac{d\theta}{dx}\right)dx+\left(\frac{d\theta}{dy}\right)dy+\left(\frac{d\theta}{dz}\right)dz+$ec., $d\pi=\left(\frac{d\pi}{dx}\right)dx+\left(\frac{d\pi}{dy}\right)dy+\left(\frac{d\pi}{dz}\right)dz+$ec. Sostituendo dunque, e confrontando ciò che risulta col valor di $du=\left(\frac{du}{dx}\right)dx+\left(\frac{du}{dy}\right)dy+\left(\frac{du}{dz}\right)dz+$ec. dato

dall' equazione primitiva $u=\Phi(x, y, z, \text{ec.})$, si troverà $\left(\frac{du}{dx}\right)=$
$\left(\frac{du}{dr}\right)\left(\frac{dr}{dx}\right)+\left(\frac{du}{d\theta}\right)\left(\frac{d\theta}{dx}\right)+\left(\frac{du}{d\pi}\right)\left(\frac{d\pi}{dx}\right)+$ec.; e simili valori si avranno per $\left(\frac{du}{dy}\right)$, $\left(\frac{du}{dz}\right)$, ec. Sia per esempio $u=\Phi(x, y, z)$ ed $x=r\cos\theta$, $y=r\,sen\,\theta\cos\pi$, $z=r\,sen\,\theta\,sen\,\pi$; d'onde $r=\sqrt{(x^2+y^2+z^2)}$, $\cos\theta=\frac{x}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)}}$, $tang\,\pi=\frac{z}{y}$. Dunque $\left(\frac{dr}{dx}\right)=\cos\theta$, $\left(\frac{d\theta}{dx}\right)=-\frac{sen\,\theta}{r}$, $\left(\frac{d\pi}{dx}\right)=0$, e per conseguenza $\left(\frac{du}{dx}\right)=\cos\theta\left(\frac{du}{dr}\right)-\frac{sen\,\theta}{r}\left(\frac{du}{d\theta}\right)$. Si troverà egualmente $\left(\frac{du}{dy}\right)=\left(\frac{du}{dr}\right)sen\,\theta\cos\pi+\left(\frac{du}{d\theta}\right)\frac{\cos\theta\cos\pi}{r}-\left(\frac{du}{d\pi}\right)\frac{sen\,\pi}{r\,sen\,\theta}$; $\left(\frac{du}{dz}\right)=\left(\frac{du}{dr}\right)sen\,\theta\,sen\,\pi+\left(\frac{du}{d\theta}\right)\frac{\cos\theta\,sen\,\pi}{r}+\left(\frac{du}{d\pi}\right)\frac{\cos\pi}{r\,sen\,\theta}$.

954. Volendo $\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)$, porremo $\left(\frac{du}{dx}\right)=A$, e sarà $\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)=\left(\frac{dA}{dx}\right)=\left(\frac{dA}{dr}\right)\left(\frac{dr}{dx}\right)+\left(\frac{dA}{d\theta}\right)\left(\frac{d\theta}{dx}\right)+\left(\frac{dA}{d\pi}\right)\left(\frac{d\pi}{dx}\right)+$eç. Somiglianti espressioni si otterranno per $\left(\frac{d^2u}{dy^2}\right)$, $\left(\frac{d^2u}{dz^2}\right)$, ec. ponendo $\left(\frac{du}{dy}\right)=B$, $\left(\frac{du}{dz}\right)=C$, ec. Così continuando l' esempio precedente, poichè $\left(\frac{dA}{dr}\right)=\left(\frac{d^2u}{dxdr}\right)=\left(\frac{d^2u}{dr^2}\right)\cos\theta-\left(\frac{d^2u}{d\theta dr}\right)\frac{sen\theta}{r}+\left(\frac{du}{d\theta}\right)\frac{sen\theta}{r^2}$, $\left(\frac{dA}{d\theta}\right)=\left(\frac{d^2u}{dxd\theta}\right)=\left(\frac{d^2u}{drd\theta}\right)\cos\theta-\left(\frac{du}{dr}\right)sen\theta-\left(\frac{d^2u}{d\theta^2}\right)\frac{sen\theta}{r}-\left(\frac{du}{d\theta}\right)\frac{\cos\theta}{r}$, $\left(\frac{dA}{d\pi}\right)=\left(\frac{d^2u}{dxd\pi}\right)=\left(\frac{d^2u}{drd\pi}\right)\cos\theta-\left(\frac{d^2u}{d\theta d\pi}\right)\frac{sen\theta}{r}$, sostituiti questi e i valori già trovati di $\left(\frac{dr}{dx}\right)$, $\left(\frac{d\theta}{dx}\right)$, $\left(\frac{d\pi}{dx}\right)$, avremo $\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)=\left(\frac{d^2u}{dr^2}\right)-\frac{sen\,2\theta}{r}\left(\left(\frac{d^2u}{d\theta dr}\right)-\frac{1}{r}\left(\frac{du}{d\theta}\right)\right)-sen^2\theta\left(\left(\frac{d^2u}{dr^2}\right)-\frac{1}{r}\left(\frac{du}{dr}\right)-\frac{1}{r^2}\left(\frac{d^2u}{d\theta^2}\right)\right)$. Nel modo stesso potrà ottenersi $\left(\frac{d^3u}{dx^3}\right)$, ec.

955. Si supponga adesso che una delle variabili, per esempio x, sia *funzione implicita* di tutte le altre, data cioè per l' equazione $u=0$, essendo come sopra $u=\Phi(x, y, z, \omega, \text{ec.})$. Avremo $x=f(y, z, \omega, \text{ec.})$, $dx=\left(\frac{dx}{dy}\right)dy+\left(\frac{dx}{dz}\right)dz+\left(\frac{dx}{d\omega}\right)d\omega+$ ec., e $du=\left(\frac{du}{dx}\right)\left(\left(\frac{dx}{dy}\right)dy+\left(\frac{dx}{dz}\right)dz+\left(\frac{dx}{d\omega}\right)d\omega+\text{ec.}\right)+$ $\left(\frac{du}{dy}\right)dy+\left(\frac{du}{dz}\right)dz+\left(\frac{du}{d\omega}\right)d\omega+\text{ec.}\ \left(\left(\frac{du}{dx}\right)\left(\frac{dx}{dy}\right)+\left(\frac{du}{dy}\right)\right)dy+$ $\left(\left(\frac{du}{dx}\right)\left(\frac{dx}{dz}\right)+\left(\frac{du}{dz}\right)\right)dz+\left(\left(\frac{du}{dx}\right)\left(\frac{dx}{d\omega}\right)+\left(\frac{du}{d\omega}\right)\right)d\omega+\text{ec.}$, differenziale dell' equazione $u=0$, che avrà altrettanti termini quante saran variabili indipendenti nell' equazione.

956. Volendo d^2u, noteremo che i coefficienti $\left(\frac{dx}{dy}\right)$, $\left(\frac{dx}{dz}\right)$, $\left(\frac{dx}{d\omega}\right)$ ec. son come x (955) funzioni delle sole indipendenti y, z, ω, ec. mentre $\left(\frac{du}{dx}\right)$, $\left(\frac{du}{dy}\right)$, $\left(\frac{du}{dz}\right)$, ec. lo sono, egualmente che u, anche di x. Differenziando dunque per ciascuna variabile, e sostituendo in seguito il valore di dx già accennato (955) troveremo

$$\left(\left(\frac{d^2u}{dy^2}\right)+2\left(\frac{d^2u}{dxdy}\right)\left(\frac{dx}{dy}\right)+\left(\frac{du}{dx}\right)\left(\frac{d^2x}{dy^2}\right)+\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)\left(\frac{dx}{dy}\right)^2\right)dy^2+$$
$$\left(\left(\frac{d^2u}{dydz}\right)+\left(\frac{d^2u}{dxdz}\right)\left(\frac{dx}{dy}\right)+\left(\frac{du}{dx}\right)\left(\frac{d^2x}{dydz}\right)+\left(\frac{d^2u}{dydx}\right)\left(\frac{dx}{dz}\right)+\right.$$
$$\left.\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)\left(\frac{dx}{dy}\right)\left(\frac{dx}{dz}\right)\right)dzdy+\left(\left(\frac{d^2u}{dyd\omega}\right)+\left(\frac{d^2u}{dxd\omega}\right)\left(\frac{dx}{dy}\right)+\right.$$
$$\left.\left(\frac{du}{dx}\right)\left(\frac{d^2x}{dyd\omega}\right)+\left(\frac{d^2u}{dydx}\right)\left(\frac{dx}{d\omega}\right)+\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)\left(\frac{dx}{dy}\right)\left(\frac{dx}{d\omega}\right)\right)d\omega dy+$$
$$\text{ec.}+\left(\left(\frac{du}{dx}\right)\left(\frac{dx}{dy}\right)+\left(\frac{du}{dy}\right)\right)d^2y$$

differenziale del primo termine di du; cangiandovi y in z e quindi in ω, ec. avremo i differenziali dei termini seguenti; e tutti insieme sommati, e fatte le opportune riduzioni daranno d^2u: nell' istessa maniera si troveranno d^3u, d^4u, ec.

957. Ma qui é importantissimo l' osservare che tanto du quanto gli altri differenziali superiori dell' equazione $u=0$ sono tutti nulli. Si concepisca infatti un nuovo sistema di m variabili u', x', y', z', ec., le due prime tali che soddisfacciano all' equazioni $u'=\varphi(x', y', z', \text{ec.})$, $\varphi(x', y', z', \text{ec.})=0$, le altre da determinarsi ad arbitrio. Potremo dunque supporre $y'=y+dy$, $z'=z+dz$, ec., e allora dall' equazione seconda si avrà $x'=f(y', z', \text{ec.})=f(y+dy, z+dz, \text{ec.})=(914)\, x+dx$, e perciò dall' altra, $u'=\varphi(x+dx, y+dy, z+dz, \text{ec.})=u+du$. Ma $u=0$, $u'=0$, dunque anche $du=0$. Quindi anche d^2u, che è rapporto a du ciò che é du rapporto ad u, sarà egualmente nullo, e lo saran parimente d^3u, d^4u, ec.

958. Anzi saran nulli separatamente in ogni ordine i coefficienti completi dei differenziali di ciascuna variabile e delle loro potenze e prodotti. Infatti è visibile in primo luogo che in $du=0$ tutti i termini si annullano da se stessi, sia perchè posson respettivamente considerarsi come differenziali dell' equazioni $u=\varphi(x, y)=0$, $u=\varphi(x, z)=0$, $u=\varphi(x, \omega)=0$, ec., sia per l'indipendenza delle quantità y, z, ω, ec., che permettendo di assumere come variabile una sola di esse ad arbitrio, e le altre come costanti senza che l' equazione resti alterata, fa che possan aversi tante equazioni differenti e tutte col secondo membro nullo, quante son le variabili indipendenti, ossia quanti son termini in du. Ma i differenziali dy, dz, $d\omega$, ec. non possono esser nulli, altrimenti y, z, ω sarebbero costanti; lo saranno perciò i lor coefficienti. Dunque in secondo luogo anderà separatamente a zero in d^2u tutto ciò che proviene dalla differenziazione di essi coefficienti; e per l' indipendenza delle variabili dovran poi da se stesse annullarsi le diverse parti di questi differenziali, di cui ciascuna ha per moltiplicatore o il quadrato del differenziale di una variabile o il suo prodotto col differenziale di una per l' altre (956). Ma questo moltiplicatore non può esser nullo; dovrà dunque esserlo il suo coefficiente. E lo saranno del pari i coefficienti delle terze potenze e dei prodotti, che s' incontrano in d^3u; delle quarte potenze e dei prodotti, che si avranno in d^4u, ec. Ciò però non ha luogo nel caso di $u=\varphi(x)=0$, perché allora x è costante (911) ed essendo nulla la differenza dx e tutte le sue potenze, non è di necessità che lo sieno i lor coefficienti.

959. Dunque con $u=0$, supposte tre sole variabili e portando le differenziazioni fino al second' ordine inclusive, avremo le cinque seguenti equazioni generali, che tutte sussisteranno insieme con la data.

$$1.^a \left(\frac{du}{dx}\right)\left(\frac{dx}{dy}\right)+\left(\frac{du}{dy}\right)=0$$

$$2.^a \left(\frac{du}{dx}\right)\left(\frac{dx}{dz}\right)+\left(\frac{du}{dz}\right)=0$$

$$3.^a \left(\frac{d^2u}{dy^2}\right)+2\left(\frac{d^2u}{dxdy}\right)\left(\frac{dx}{dy}\right)+\left(\frac{du}{dx}\right)\left(\frac{d^2x}{dy^2}\right)+\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)\left(\frac{dx}{dy}\right)^2=0$$

$$4.^a \left(\frac{d^2u}{dydz}\right)+\left(\frac{d^2u}{dxdz}\right)\left(\frac{dx}{dy}\right)+\left(\frac{du}{dx}\right)\left(\frac{d^2x}{dydz}\right)+\left(\frac{d^2u}{dxdy}\right)\left(\frac{dx}{dz}\right)+$$
$$\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)\left(\frac{dx}{dy}\right)\left(\frac{dx}{dz}\right)=0$$

$$5.^a \left(\frac{d^2u}{dz^2}\right)+2\left(\frac{d^2u}{dxdz}\right)\left(\frac{dx}{dz}\right)+\left(\frac{du}{dx}\right)\left(\frac{d^2x}{dz^2}\right)+\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)\left(\frac{dx}{dz}\right)^2=0$$

Altre quattro equazioni si avrebbero differenziando una terza volta, e queste in una quarta differenziazione darebbero luogo ad altre cinque, onde portando fino all' n^{simo} l' ordine delle differenziali, si otterranno $(n+1)\left(\frac{n+2}{2}\right)-1$ equazioni di questo genere, che tutte dovranno sussistere insieme e con la proposta. Si aumenterebbe questo numero fino ad $(n+1)\times\left(\frac{n+2}{2}\right)\left(\frac{n+3}{3}\right)-1$ se si avessero quattro variabili, e diverrebbe $(n+1)\left(\frac{n+2}{2}\right)\left(\frac{n+3}{3}\right).....\left(\frac{n+m-1}{m-1}\right)-1$ qualora se ne avessero m; espressione che facendo successivamente $n=1$, $n=2$, $n=3$, ec., si cangia assai facilmente nell' altra più comoda $m\left(\frac{m+1}{2}\right)\left(\frac{m+2}{3}\right).....\left(\frac{m+n-1}{n}\right)-1$ Or tutte queste equazioni, e le infinite combinazioni che posson farsene, si chiamano *equazioni a differenze parziali*, mentre le altre $du=0$, $d^2u=0$, ec. chiamansi *equazioni differenziali esatte*, o semplicemente *differenziali*. Si adoprano molto vantaggiosamente nella Geometria più sublime per eliminare in parte o tutte le costanti,

che in una data equazione posson trovarsi comunque combinate con le variabili.

Esempio I.° Sia $x^2+ay^2+c(y+z)^2+r=0$; avremo dunque $u=x^2+ay^2+c(y+z)^2+r$, e in conseguenza $\left(\frac{du}{dx}\right)=2x$, $\left(\frac{du}{dy}\right)=2ay+2c(y+z)$, $\left(\frac{du}{dz}\right)=2c(y+z)$: valori che sostituiti nelle equazioni generali 1.ª, 2.ª daranno $x\left(\frac{dx}{dy}\right)+ay+c(y+z)=0$, $x\left(\frac{dx}{dz}\right)+c(y+z)=0$: or da queste e dalla data facilmente si ha $x^2-x\left(z\left(\frac{dx}{dz}\right)+y\left(\frac{dx}{dy}\right)\right)+r=0$, ove non é traccia alcuna delle costanti a, c che si trovano nella proposta.

Esempio II.° Sia $(az-b)^2+(cy-e)^2+(gx-h)^2=0$, avremo $u=(az-b)^2+(cy-e)^2+(gx-h)^2$, e di qui $\left(\frac{du}{dx}\right)=2g(gx-h)$, $\left(\frac{du}{dy}\right)=2c(cy-e)$, $\left(\frac{du}{dz}\right)=2a(az-b)$. Inoltre $\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)=2g^2$, $\left(\frac{d^2u}{dy^2}\right)=2c^2$, $\left(\frac{d^2u}{dz^2}\right)=2a^2$, $\left(\frac{d^2u}{dxdy}\right)=2g^2\left(\frac{dx}{dy}\right)$, $\left(\frac{d^2u}{dxdz}\right)=2g^2\left(\frac{dx}{dz}\right)$, $\left(\frac{d^2u}{dzdy}\right)=0$. Sostituendo dunque nell'equazioni generali, si avrà $c(cy-e)+g(gx-h)\left(\frac{dx}{dy}\right)=0$, $a(az-b)+g(gx-h)\left(\frac{dx}{dz}\right)=0$, $c^2+3g^2\left(\frac{dx}{dy}\right)^2+g(gx-h)\left(\frac{d^2x}{dy^2}\right)=0$, $3g^2\left(\frac{dx}{dz}\right)\left(\frac{dx}{dy}\right)+g(gx-h)\left(\frac{d^2x}{dzdy}\right)=0$, $a^2+3g^2\left(\frac{dx}{dz}\right)^2+g(gx-h)\times\left(\frac{d^2x}{dz^2}\right)=0$, dalle quali unite alla prima si ha $\left(\left(\frac{d^2x}{dz^2}\right)\left(\frac{dx}{dy}\right)-\left(\frac{d^2x}{dydz}\right)\left(\frac{dx}{dz}\right)\right)\left(2\left(\frac{d^2x}{dy^2}\right)\left(\frac{dx}{dz}\right)-\left(\frac{d^2x}{dydz}\right)\left(\frac{dx}{dy}\right)\right)+\left(\left(\frac{dx}{dz}\right)\left(\frac{d^2x}{dy^2}\right)-\left(\frac{dx}{dy}\right)\left(\frac{d^2x}{dydz}\right)\right)\left(\frac{dx}{dy}\right)\left(\frac{d^2x}{dz^2}\right)=0$, senza alcuna costante.

960. Apparisce intanto assai chiaramente dall' esposto: 1.° che potendosi con N equazioni eliminare N — 1 costanti, un' equazione differenziale dell' ordine n^{simo} fra m variabili potrà contenere un numero $N = m\left(\frac{m+1}{2}\right)\left(\frac{m+2}{3}\right)\ldots\ldots\left(\frac{m+n-1}{n}\right) - 1$ di costanti meno dell' equazione finita da cui deriva. Così nel 1.° esempio, in cui $m=3$, $n=1$, ed $N=m-1=2$ mancano appunto nella differenziale finale due costanti. In qualche circostanza posson mancarne di più, come nel 2.° esempio, ove essendo $m=3$, $n=2$, si avrebbe $N=\frac{m(m+1)}{2}-1=5$, mentre le costanti eliminate son sei: se ne intenderà facilmente la cagione: 2.° che la scelta delle costanti da eliminarsi e di quelle da rilasciarsi essendo arbitraria, da una stessa equazione finita posson derivarsi molte equazioni differenziali di un ordine stesso e indeterminatamente differenti fra loro in ragione delle costanti eliminate nell' una, rilasciate nell' altre. Così nel 1.° esempio, se si fosse eliminato r in luogo di a, avremmo avuto $x\left(\frac{dr}{dy}\right)-x\left(\frac{dr}{dz}\right)+ay=0$.

961. Ma passiamo ad altro genere di equazioni, e si abbia in primo luogo $u=\Phi(f(x), y, z, \text{ec.})=0$; sarà qui pure x funzione di y, z, ec.; onde posto per brevità $f(x)=f$, avremo $df=(942)\left(\frac{df}{dx}\right)dx=\left(\frac{df}{dx}\right)\left(\left(\frac{dx}{dy}\right)dy+\left(\frac{dx}{dz}\right)dz+\text{ec.}\right)$, e $du=\left(\frac{du}{df}\right)df+\left(\frac{du}{dy}\right)dy+\left(\frac{du}{dz}\right)dz+\text{ec.}=\left(\left(\frac{du}{df}\right)\left(\frac{df}{dx}\right)\left(\frac{dx}{dy}\right)+\left(\frac{du}{dy}\right)\right)dy+\left(\left(\frac{du}{df}\right)\left(\frac{df}{dx}\right)\left(\frac{dx}{dz}\right)+\left(\frac{du}{dz}\right)\right)dz+\text{ec.}$

962. Si abbia in secondo luogo $u=\Phi(f(p, q, \text{ec.}), x, y, z, \text{ec.})=0$, e si suppongano p, q ec. funzioni di x, y, z, ec., sarà come per l' avanti x funzione di y, z, ec., e quindi (955) $dp=\left(\left(\frac{dp}{dx}\right)\left(\frac{dx}{dy}\right)+\left(\frac{dp}{dy}\right)\right)dy+\left(\left(\frac{dp}{dx}\right)\left(\frac{dx}{dz}\right)+\left(\frac{dp}{dz}\right)\right)dz+\text{ec.}$, $dq=\left(\left(\frac{dq}{dx}\right)\left(\frac{dx}{dy}\right)+\left(\frac{dq}{dy}\right)\right)dy+\left(\left(\frac{dq}{dx}\right)\left(\frac{dx}{dz}\right)+\left(\frac{dq}{dz}\right)\right)dz+\text{ec.}$;

onde poichè fatto $f(p,q,\text{ec.})=\text{F}$, si ha $d\text{F}=\left(\frac{d\text{F}}{dp}\right)dp+\left(\frac{d\text{F}}{dq}\right)dq+$ ec., avremo dunque $du=\left(\frac{du}{d\text{F}}\right)d\text{F}+\left(\frac{du}{dx}\right)dx+\left(\frac{du}{dy}\right)dy+\left(\frac{du}{dz}\right)dz+$ ec. $=\Big\{\left(\frac{du}{d\text{F}}\right)\Big(\left(\frac{d\text{F}}{dp}\right)\left(\frac{dp}{dx}\right)\left(\frac{dx}{dy}\right)+\left(\frac{d\text{F}}{dp}\right)\left(\frac{dp}{dy}\right)+\left(\frac{d\text{F}}{dq}\right)\left(\frac{dq}{dx}\right)\times$ $\left(\frac{dx}{dy}\right)+\left(\frac{d\text{F}}{dq}\right)\left(\frac{dq}{dy}\right)+\text{ec.}\Big)+\left(\frac{du}{dx}\right)\left(\frac{dx}{dy}\right)+\left(\frac{du}{dy}\right)\Big\}dy+$ $\Big\{\left(\frac{du}{d\text{F}}\right)\Big(\left(\frac{d\text{F}}{dp}\right)\left(\frac{dp}{dx}\right)\left(\frac{dx}{dz}\right)+\left(\frac{d\text{F}}{dp}\right)\left(\frac{dp}{dz}\right)+\left(\frac{d\text{F}}{dq}\right)\left(\frac{dq}{dx}\right)\left(\frac{dx}{dz}\right)+$ $\left(\frac{d\text{F}}{dq}\right)\left(\frac{dq}{dz}\right)+\text{ec.}\Big)+\left(\frac{du}{dx}\right)\left(\frac{dx}{dz}\right)+\left(\frac{du}{dz}\right)\Big\}dz+$ ec.

963. E qui pure avranno evidentemente luogo i teoremi già dimostrati (958) rapporto all' annullamento di ciascuna differenziale sì parziale che esatta, al numero dell' equazioni che posson dedursene coesistenti alla proposta, e all' uso che può farsene per eliminar le costanti. Ma nel caso attuale è di maggior vantaggio adoprarle in eliminar la funzione indeterminata F. Sul che è da osservarsi che l'intera eliminazione di questa quantità dipende da quella dei coefficienti $\left(\frac{du}{d\text{F}}\right)$, $\left(\frac{d\text{F}}{dp}\right)$, $\left(\frac{d\text{F}}{dq}\right)$, ec., dei quali, supposte r le funzioni p, q, ec., se ne hanno manifestamente $r+1$ in ciascuna equazione del primo ordine; il doppio o $2(r+1)$ in quelle del secondo, ove oltre quanti ne sussistono nel primo si trovano i lor derivati $\left(\frac{d^2u}{d\text{F}^2}\right)$, $\left(\frac{d^2\text{F}}{dp^2}\right)$, ec.; $3(r+1)$ in quelle del terzo, e $n(r+1)$ in quelle dell' n^{simo}. In conseguenza, poichè il numero dell' equazioni deve superar quello delle quantità da eliminarsi, con le sole equazioni differenziali prese fino all' ordine n^{simo} potremo eliminare i coefficienti della forma $\left(\frac{du}{d\text{F}}\right)$, $\left(\frac{d\text{F}}{dp}\right)$, $\left(\frac{d\text{F}}{dq}\right)$, ec. ogni qualvolta il numero $m\left(\frac{m+1}{2}\right)\left(\frac{m+2}{3}\right)\ldots\left(\frac{m+n-1}{n}\right)-1$ dell' equazioni (959) sia $>n(r+1)$. Si eccettui il caso di $n=1$, nel quale basterà avere $m-1>r$, ossia $m>r+1$, perchè $\left(\frac{du}{d\text{F}}\right)$ va unito come fattore

di primo ordine ai coefficienti $\left(\frac{dF}{dp}\right)$, $\left(\frac{dF}{dq}\right)$, ec. e svanisce con loro. Del resto eliminati questi coefficienti, con la data e con una qualunque delle trasformate elimineremo anche F.

Applicazioni del Calcolo Differenziale

Sviluppo delle funzioni in serie.

964. Sia $u=\phi(x)$ e debba svilupparsi questa funzione in serie ordinata per le potenze intere e positive di x, Supporremo $u=q+q'x+q''x^2+q'''x^3+$ec., e in primo luogo i coefficienti q, q', q'', ec. saranno tutti indipendenti da x (918). Inoltre se, fatto $x=0$, u si cangi in u' sarà il primo termine $q=u'$ (918. 1.°). Infine successivamente differenziando, presa dx costante, si avranno l'equazioni

$$\frac{du}{dx}=q'+2q''x+3q'''x^2+4q^{\text{iv}}x^3+5q^{\text{v}}x^4+\text{ec.}$$

$$\frac{d^2u}{dx^2}=1.2q''+2.3q'''x+3.4q^{\text{iv}}x^2+4.5q^{\text{v}}x^3+\text{ec.}$$

$$\frac{d^3u}{dx^3}=1.2.3q'''+2.3.4q^{\text{iv}}x+3.4.5q^{\text{v}}x^2+\text{ec.}; \text{ ed in generale}$$

$$\frac{d^nu}{dx^n}=1.2.3\ldots\ldots nq^{(n)}+2.3.4\ldots\ldots(n+1)q^{(n+1)}x+\text{ec.}$$

e fatto generalmente $x=0$, dalla prima di queste serie si otterrà $q'=\frac{du}{dx}$, dalla seconda $q''=\frac{d^2u}{2dx^2}$, dalla terza $q'''=\frac{d^3u}{2.3dx^3}$, e in generale dall' n^{sima} $q^{(n)}=\frac{d^nu}{2.3\ldots(n)dx^n}$ purchè anche nei quozienti $\frac{du}{dx}$, $\frac{d^2u}{dx^2}$, $\frac{d^nu}{dx^n}$ si ponga $x=0$.

Sia dunque $u=sen\,x$, sarà $q=0$, $\frac{du}{dx}=$ (926) $cos\,x$, $\frac{d^2u}{dx^2}=-sen\,x$, $\frac{d^3u}{dx^3}=-cos\,x$, $\frac{d^4u}{dx^4}=sen\,x$, $\frac{d^5u}{dx^5}=cos\,x$, ec.; onde posto

$x=0$, avremo $q'=1$, $q''=0$, $q'''=-\frac{1}{2.3}$, $q^{iv}=0$, $q^{v}=\frac{1}{2.3.4.5}$, ec.
e quindi $\operatorname{sen} x=x-\frac{x^3}{2.3}+\frac{x^5}{2.3.4.5}-$ec., come già si sapeva (655.8o.ª)

Sia $u=e^x$, avremo $q=e^0=1$, $\frac{du}{dx}=(925)e^x$, $\frac{d^2u}{dx^2}=e^x$, $\frac{d^3u}{dx^3}=e^x$, ec., e in conseguenza $q'=e^0=1$, $q''=\frac{1}{2}$, $q'''=\frac{1}{2.3}$, $q^{iv}=\frac{1}{2.3.4}$, ec. ed $e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{2.3}+\frac{x^4}{2.3.4}+$ec. (410).

Sia $u=\sqrt{(a^2-x^2)}$, dunque $q=a$, $\frac{du}{dx}=-\frac{x}{\sqrt{(a^2-x^2)}}$, $\frac{d^2u}{dx^2}=-\frac{a^2}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}$, $\frac{d^3u}{dx^3}=-\frac{3a^2x}{\sqrt{(a^2-x^2)^5}}$, $\frac{d^4u}{dx^4}=-\frac{3a^2(a^2+4x^2)}{\sqrt{(a^2-x^2)^7}}$, ec.; onde $q'=0$, $q''=-\frac{1}{2a}$, $q'''=0$, $q^{iv}=-\frac{3}{2.3.4a^3}$, ec. Dunque $\sqrt{(a^2-x^2)}=a-\frac{x^2}{2a}-\frac{x^4}{8a^3}-$ec. (178).

Sia $u=\log(1\pm x)$, avremo $q=\log 1=0$(396.1.°), $\frac{du}{dx}=\pm\frac{1}{1\pm x}$ (924), $\frac{d^2u}{dx^2}=-\frac{1}{(1\pm x)^2}$, $\frac{d^3u}{dx^3}=\pm\frac{2}{(1\pm x)^3}$, $\frac{d^4u}{dx^4}=-\frac{2.3}{(1\pm x)^4}$, $\frac{d^5u}{dx^5}=\pm\frac{2.3.4}{(1\pm x)^5}$ec.; onde $q'=\pm 1$, $q''=-\frac{1}{2}$, $q'''=\pm\frac{1}{3}$, $q^{iv}=-\frac{1}{4}$, $q^{v}=\pm\frac{1}{5}$, e $\log(1\pm x)=\pm x-\frac{x^2}{2}\pm\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\pm\frac{x^5}{5}-$ec. Fatto $x=1$ la serie inferiore dà $\log 0=-1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$ ec. $=-\infty$, onde *lo zero ha per logaritmo l' infinito negativo*.

Si noti che qualora lo sviluppo per le potenze intere e positive della variabile sia di sua natura impossibile, avremo dei resultati o assurdi, o per lo meno insignificanti: tale è il caso di $u=\log x$, per cui si avrebbe $q'=-\infty$, $q''=\infty$, ec. Tale è parimente quello di $\cot x$, per cui si avrebbe $q=\infty$ (656.85.ª): tale finalmente quello di tutte le espressioni frazionarie, il cui denominatore è multiplo di x^n, mentre in tal caso tutti i denomi-

natori dei coefficienti differenziali $\frac{du}{dx}$, $\frac{d^2u}{dx^2}$, ec. hanno per fattore una potenza di x, e divengono infiniti facendovi $x=0$. Volendone lo sviluppo in serie converrà attenersi alla regola già data altrove (388).

965. La serie $u=q+q'x+q''x^2$ec. detta di *Maclaurin* dal nome del suo inventore si applica alla ricerca diretta degli integrali $\int x^n dx$, $\int \frac{dx}{1\pm x}$, $\int e^x dx$, $\int dx \cos x$ ec., che noi già trovammo per via indiretta (948). Pongasi infatti $u=\int x^n dx$, sarà $\frac{du}{dx}=x^n$, $\frac{d^2u}{dx^2}=nx^{n-1}$, $\frac{d^3u}{dx^3}=n(n-1)x^{n-2}$, $\frac{d^{n+1}u}{dx^{n+1}}=n(n-1)(n-2)\ldots 3.2.1$; dunque fatto $x=0$(964) si avrà $q'=0$, $q''=0$, $q'''=0$...... $q^{n+1}=\frac{n(n-1)(n-2)\ldots 3.2.1}{1.2.3\ldots n(n+1)}$; quindi $u=\int x^n dx=q+q^{n+1}x^{n+1}=q+\frac{x^{n+1}}{n+1}$, ove q è la costante, poichè non contiene x (964).

Pongasi $u=\int\frac{dx}{1+x}$, sarà $\frac{du}{dx}=\frac{1}{1+x}$, $\frac{d^2u}{dx^2}=-\frac{1}{(1+x)^2}$, $\frac{d^3u}{dx^3}=\frac{2}{(1+x)^3}$, $\frac{d^4u}{dx^4}=-\frac{2.3}{(1+x)^4}$ ec.; e perciò $q'=1$, $q''=-\frac{1}{2}$, $q'''=\frac{1}{3}$, $q^{IV}=-\frac{1}{4}$ ec., ed $u=\int\frac{dx}{1+x}=q+x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}$ ec. $=q+log(1+x)$.

Pongasi $u=\int dx \cos x$, avremo $\frac{du}{dx}=\cos x$, $\frac{d^2u}{dx^2}=-\operatorname{sen} x$, $\frac{d^3u}{dx^3}=-\cos x$, $\frac{d^4u}{dx^4}=\operatorname{sen} x$ ec., e quindi $q'=1$, $q''=0$, $q'''=-\frac{1}{2.3}$, $q^{V}=0$, ec., e $\int dx \cos x=q+x-\frac{1}{2.3}x^3+\frac{x^5}{2.3.4.5}$ ec. $=q+\operatorname{sen} x$.

Sia $u=\int e^x dx$, avremo $\frac{du}{dx}=e^x$, $\frac{d^2u}{dx^2}=e^x$, $\frac{d^3u}{dx^3}=e^x$, ec. $q'=1$, $q''=\frac{1}{2}$, $q'''=\frac{1}{2.3}$ e $\int e^x dx=q+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{2.3}+$ec. $=q+e^x$.

966. Ma passiamo a più importanti applicazioni, e sia più

In generale $u=\phi(\omega+x)$: avremo $q=\phi(\omega)$, e (936) $\frac{d^n u}{dx^n}=\phi^{(n)}(\omega+x)$.

Dunque (964) $q^{(n)}=\frac{\phi^{(n)}(\omega)}{1.2.3...n}=$ (936) $\frac{d^n\phi(\omega)}{1.2.3...nd\omega^n}$, purché si assuma costante $d\omega$ (915). Perciò cangiato per semplicità $\phi(\omega)$ in ϕ, avremo $\phi(\omega+x)=\phi+\frac{d\phi}{d\omega}.x+\frac{d^2\phi}{2d\omega^2}.x^2+\frac{d^3\phi}{2.3d\omega^3}.x^3+$ec.

Cangiato x in $-x$, sarà $\phi(\omega-x)=\phi-\frac{d\phi}{d\omega}.x+\frac{d^2\phi}{2d\omega^2}.x^2-\frac{d^3\phi}{2.3d\omega^3}.x^3+$ec.

onde in generale $\phi(\omega\pm x)=\phi\pm\frac{d\phi}{d\omega}.x+\frac{d^2\phi}{2d\omega^2}.x^2\pm\frac{d^3\phi}{2.3d\omega^3}.x^3+$ec.

Teorema celebre di *Taylor*, che dà il valor di una funzione qualunque ϕ di ω, quando ω vi é aumentato di $\pm x$.

Per vederne la verità in un esempio semplice, sia $\phi=\omega^2-2\omega+1$ e si cerchi il valor di questa quantità sostituendo $\omega+1$ ad ω. Avremo $x=1$, $\frac{d\phi}{d\omega}=2\omega-2$, $\frac{d^2\phi}{d\omega^2}=2$, $\frac{d^3\phi}{d\omega^3}=0$, ec.; dunque ϕ si cangia in $\omega^2-2\omega+1+2\omega-2+1=\omega^2$, il che è evidente.

967. Sia $\phi=\omega^m$; dunque $\frac{d\phi}{d\omega}=m\omega^{m-1}$, $\frac{d^2\phi}{2d\omega^2}=\frac{m(m-1)}{2}\omega^{m-2}$, ec.

e $(\omega\pm x)^m=\omega^m\pm m\omega^{m-1}x+\frac{m(m-1)}{2}\omega^{m-2}x^2\pm$ec.

Sia $\phi=b^\omega$, sarà $\frac{d\phi}{d\omega}=b^\omega lb$, $\frac{d^2\phi}{d\omega^2}=b^\omega l^2b$, $\frac{d^3\phi}{d\omega^3}=b^\omega l^3b$,

ec. e $b^{\omega\pm x}=b^\omega(1\pm xlb+\frac{x^2l^2b}{2}\pm\frac{x^3l^3b}{2.3}+$ec.).

Sia ϕ un arco il cui seno è ω, che indicheremo con $\phi=A\,sen\,\omega$; dunque $d\phi=d(arc.\,sen\,\omega)=$ (931) $\frac{d\omega}{\sqrt{(1-\omega^2)}}$; onde $\frac{d\phi}{d\omega}=\frac{1}{\sqrt{(1-\omega^2)}}$, $\frac{d^2\phi}{d\omega^2}=\frac{\omega}{\sqrt{(1-\omega^2)^3}}$, $\frac{d^3\phi}{d\omega^3}=\frac{1+2\omega^2}{\sqrt{(1-\omega^2)^5}}$, ec.; e $A sen(\omega\pm x)=A sen\omega\pm\frac{x}{\sqrt{(1-\omega^2)}}+\frac{\omega x^2}{2\sqrt{(1-\omega^2)^3}}\pm$ec. Troveremo egualmente $A cos(\omega\pm x)=A cos\omega\mp\frac{x}{\sqrt{(1-\omega^2)}}-\frac{\omega x^2}{2\sqrt{(1-\omega^2)^3}}\mp$ec. Queste serie

sono attissime a calcolare l' arco, che corrisponde a un seno o coseno dato. Preso dalle Tavole l' arco più vicino, la differenza del suo seno ω dal dato renderà x piccolissimo, e si avrà l' arco cercato aggiungendo $\pm\frac{x}{cos\Phi}+\frac{\omega x^2}{2cos^3\Phi}\pm$ ec. a quello il cui seno é ω. Osservate 1.° che la serie é sì convergente che i due primi termini danno i minuti quinti in circa; 2.° che l' arco é espresso in parti del raggio, e per ridurle a secondi, a terzi, ec. bisogna dividerle per la lunghezza dell' arco di 1″, 1‴, 1ᵛ, ec. (549), posto il logaritmo dell' unità $=10$: il quoziente dà i secondi, e di qui i terzi, i quarti, ec.

Facciamo $\Phi=sen\omega$, onde $\frac{d\Phi}{d\omega}=cos\omega$, $\frac{d^2\Phi}{d^2\omega}=-sen\omega$; $\frac{d^3\Phi}{d\omega^3}=-cos\omega$, ec., e sarà $sen(\omega\pm x)=sen\omega\pm xcos\omega-\frac{x^2}{2}sen\omega\mp\frac{x^3}{2.3}cos\omega+$ec. Parimente si troverà $cos(\omega\pm x)=cos\omega\mp xsen\omega-\frac{x^2}{2}cos\omega\pm\frac{x^3}{2.3}sen\omega+$ec.; $tang(\omega\pm x)=tang\omega\pm\frac{x}{cos^2\omega}+\frac{x^2sen\omega}{cos^3\omega}\pm\frac{x^3(1+2sen^2\omega)}{3cos^4\omega}+$ec.

968. La serie di Taylor suppone che nello sviluppamento di $\Phi(\omega+x)$ non abbian luogo che le sole potenze intere e positive di x. Ora è facile dimostrare che in effetto queste potenze non possono esser giammai negative, e neppur posson divenir frazionarie almeno finchè x vi resta indeterminata. Infatti se qualche esponente di x risultasse negativo il termine corrispondente diverebbe infinito qualora si ponesse $x=0$ (901), e si avrebbe l' equazione assurda $\Phi(\omega)=\Phi(\omega)+\infty$. E se qualche esponente divenisse frazionario, il termine corrispondente avrebbe altrettanti valori quante unità sarebbero nel denominatore della frazione (161), onde lo sviluppamento ne avrebbe più della funzione implicita $\Phi(x+\omega)$, la quale d' altronde non può averne che quanti ne competono al primo termine $\Phi(\omega)$, essendo chiaro che il cangiamento di ω in $\omega\pm x$ non altera nè il numero, nè il grado dei radicali contenuti in $\Phi(\omega)$. Ciò peraltro non si

verificherebbe in generale se si attribuissero ad x dei valori particolari, come se si facesse $x=\sqrt[n]{b}$; poichè allora é evidente che dovrebbero aversi più valori in $\phi(\omega\pm x)$ che in $\phi(\omega)$. In questo e in altri casi simili la forma della serie di Taylor sarebbe difettosa.

969. Infine é importantissimo l'osservare che qualora la quantità x, di cui si suppone aumentata ω, non abbia alcun valore determinato potremo supporla piccola in modo che indipendentemente dal segno, qualunque termine della serie sia maggior della somma di tutti i seguenti, come per esempio che si abbia $\frac{d\phi}{d\omega}x>\frac{d^2\phi}{2d\omega^2}x^2+\frac{d^3\phi}{2.3d\omega^3}x^3+\text{ec.}$, ovvero $\frac{d\phi}{d\omega}>x\left(\frac{d^2\phi}{2d\omega^2}+\frac{d^3\phi}{2.3d\omega^3}x+\text{ec.}\right)$ Infatti il primo membro di questa ineguaglianza è una quantità finita (936), mentre il secondo divien nullo quando $x=0$, ed é dunque suscettibile di tutti i valori reali compresi fra lo zero e l' infinito: dunque può aver qualunque di quelli che son minori di $\frac{d\phi}{d\omega}$.

970. Si supponga adesso $u=\phi(x,y)$ e vogliasi lo sviluppo di questa nuova funzione in serie ordinata per le potenze e per i prodotti di ciascuna delle due variabili x, y. Porremo

$$\begin{aligned}u=&q^{(0,0)}+q^{(1,0)}x+q^{(2,0)}x^2+q^{(3,0)}x^3+q^{(4,0)}x^4+\text{ec.}\\&+q^{(0,1)}y+q^{(1,1)}xy+q^{(2,1)}x^2y+q^{(3,1)}x^3y+q^{(4,1)}x^4y+\text{ec.}\\&+q^{(0,2)}y^2+q^{(1,2)}xy^2+q^{(2,2)}x^2y^2+q^{(3,2)}x^3y^2+q^{(4,2)}x^4y^2+\text{ec.}\\&+\text{ec.}\end{aligned}$$

ove il primo indice di q é in ciascun termine relativo all'esponente di x, l' altro a quello di y. Se u si cangi in u' quando vi si pone $x=y=0$, sarà al solito (964) $q^{(0,0)}=u'$. Inoltre se si differenzi n volte per x, supposta dx costante, e si faccia in seguito $x=0$ troveremo $\left(\frac{d^nu}{dx^n}\right)=1.2.3...n(q^{(n,0)}+q^{(n,1)}y+q^{(n,2)}y^2+\text{ec.})$, e se si differenzi questo valore n' volte per y, supposto dy co-

atante, e si ponga dipoi $y=0$, avremo $\left(\frac{d^{n+n'}u}{dx^n dy^{n'}}\right)=1.2.3..\times$ $n.1.2.3.....n' q^{(n,n')}$. Dunque $q^{(n,n')}=\frac{1}{1.2.3.....n\times 1.2.3.....n'}\times$ $\left(\frac{d^{n+n'}u}{dx^n dy^{n'}}\right)$, purché in $\left(\frac{d^{n+n'}u}{dx^n dy^{n'}}\right)$ a differenziazioni finite si ponga $x=y=0$. Nei casi di n o n' nulli, ove si avrebbe $q^{(0,n')}=\infty$, $q^{(n,0)}=\infty$, noteremo che i coefficienti di tal forma appartengono solo alla prima colonna orizzontale, e alla prima verticale, nelle quali non vi é che lo sviluppo di $\varphi(x)$ e di $\varphi(y)$. Saran perciò (964) $q^{(n,0)}=\frac{1}{1.2.3.....n}\left(\frac{d^n u}{dx^n}\right)$, $q^{(0,n')}=\frac{1}{1.2.3...n'}\left(\frac{d^{n'} u}{dy^{n'}}\right)$. Perché dunque il trovato valore di $q^{(n,n')}$ possa supplire ancora a questi due casi bisognerà sopprimere nel denominatore l'uno o l'altro dei fattori $1.2.3...n$, $1.2.3...n'$ quando n o n' son nulli.

971. Proponiamoci per riprova insieme e per esempio di tutto questo lo sviluppo di $u=(x+y)^m$. Troveremo $\left(\frac{d^{n+n'}u}{dx^n dy^{n'}}\right)=m(m-1)(m-2)....(m-n+1)(m-n)(m-n-1)(m-n-2)....(m-n-n'+1)(x+y)^{m-n-n'}$), ove dovendo farsi $x=y=0$ per dedurre $q^{(n,n')}$ é manifesto 1.° che il valor di $q^{(n,n')}$ sarà nullo in tutti quei termini, ove non lo sia l'esponente $m-n-n'$, o nei quali la somma $n+n'$ degli apici, e per conseguenza quella degli esponenti delle due variabili (970), non eguagli il grado m della potenza; il che riduce subito la serie ad $u=q^{(m,0)}x^m+q^{(m-1,1)}x^{m-1}y+q^{(m-2,2)}x^{m-2}y^2+$ ec.; 2.° che nel rimanente dei termini dovrà aversi $q^{(n,n')}=$

$$\frac{m(m-1)(m-2)......(m-n+1)(m-n)(m-n-1)(m-n-2)......(m-n-n'+1)}{1.2.3......n.1.2.3......n'},$$

o più semplicemente $q^{(n,n')}=\frac{m(m-1)(m-2)...3.2.1}{1.2.3....n.1.2.3....n'}$ per essere

$m-n-n'=0$, e perciò $=1$ l' ultimo dei fattori nel numeratore. E poiché in forza dell' equazione medesima, se $n'=0$, $=1$, $=2$, ec., si ha $n=m$, $=m-1$, $=m-2$, ec., perciò $q^{(m,0)}=1$, $q^{(m-1,1)}=m$, $q^{(m-2,2)}=\frac{m(m-1)}{2}$, ec., dunque $u=x^m+mx^{m-1}y+\frac{m(m-1)}{2}x^{m-2}y^2+\text{ec.}$

972. Che se in $u=\Phi(x,y)$ si cangi x in $\omega+x$, y in $\theta+y$, sarà $\left(\frac{d^{n+n'}u}{dx^n dy^{n'}}\right)=$ (919) $\Phi^{(n+n')}(\omega+x, \theta+y)$. Fatto adunque $x=y=0$ avremo (970) $q^{(n,n')}=\frac{1}{1.2.3...n\times 1.2.3...n'}.\Phi^{(n+n')}(\omega, \theta)=$ (919) $\frac{1}{1.2.3...n\times 1.2.3...n'}\left(\frac{d^{n+n'}\Phi(\omega, \theta)}{d\omega^n d\theta^{n'}}\right)$ Perciò ponendo per più semplicità $\Phi(\omega, \theta)=\Phi$, e sostituendo avremo (970) $\Phi(\omega+x, \theta+y)=$

$$\Phi + x\left(\frac{d\Phi}{d\omega}\right)+\frac{x^2}{2}\left(\frac{d^2\Phi}{d\omega^2}\right)+\frac{x^3}{2.3}\left(\frac{d^3\Phi}{d\omega^3}\right)+\text{ec.}$$
$$+y\left(\frac{d\Phi}{d\theta}\right)+xy\left(\frac{d^2\Phi}{d\omega d\theta}\right)+\frac{x^2y}{2}\left(\frac{d^3\Phi}{d\omega^2 d\theta}\right)+\frac{x^3y}{2.3}\left(\frac{d^4\Phi}{d\omega^3 d\theta}\right)+\text{ec.}$$
$$+\frac{y^2}{2}\left(\frac{d^2\Phi}{d\theta^2}\right)+\frac{xy^2}{2}\left(\frac{d^3\Phi}{d\omega d\theta^2}\right)+\frac{x^2y^2}{2.2}\left(\frac{d^4\Phi}{d\omega^2 d\theta^2}\right)+\frac{x^3y^2}{2.3.2}\left(\frac{d^5\Phi}{d\omega^3 d\theta^2}\right)+\text{ec.}$$
$$+\text{ ec.}$$

formula che determina il valore che prende $\Phi(\omega, \theta)$ allorché le variabili ω, θ vi sono aumentate respettivamente delle quantità x, y.

973. Con metodi eguali ai precedenti si determinerà lo sviluppo di $u=\Phi(r, y, z)$, $=\Phi(x, y, z, \omega)$, ec. Ma quello di $\frac{(f+gx+hx^2+kx^3+\text{ec.})^m}{(f'+g'x+h'x^2+k'x^3+\text{ec.})^n}$ si otterrà molto più prontamente ponendo $\frac{(f+gx+hx^2+kx^3+\text{ec.})^m}{(f'+g'x+h'x^2+k'x^3+\text{ec.})^n}=\text{F}+\text{G}x+\text{H}x^2+\text{K}x^3+\text{L}x^4+$ ec.: poiché fatto secondo il solito (964) $x=0$, sarà $\text{F}=\frac{f^m}{f'^n}$. Quindi

applicati i logaritmi a tutta l'equazione, differenziando, moltiplicando in croce e riducendo a zero si avrà:

$$\left.\begin{array}{r} ff'G+nfg'F \\ -mf'gF \end{array}\right\}=0$$

$$\left.\begin{array}{r} 2ff'H+(n+1)fg'G+2nfh'F \\ -(m-1)f'gG+(n-m)gg'F \\ -2mhf'F \end{array}\right\}=0$$

$$\left.\begin{array}{r} 3ff'K+(n+2)fg'H+(2n+1)fh'G+3nfk'F \\ -(m-2)f'gH+(n-m+1)gg'G+(2n-m)gh'F \\ -(2m-1)f'hG+(n-2m)g'hF \\ -3mf'kF \end{array}\right\}=0$$

ec. ec.

con legge assai manifesta. Che se $n=0$, avremo l'evoluzione del polinomio $(f+gx+hx^2+kx^3+\text{ec})^m$.

Soluzione approssimata delle equazioni.

974. Sia $x=fy+\Phi(x,y)$ e si voglia dato per y il valor di Fx funzione qualunque di x. Fatta $z=x-\Phi(x,y)-fy$ e $z'=x'-\Phi(x',y)-fy$ (x' è un valore arbitrario di x), sarà $z=0$, z' ciò che diviene z se vi si cangi x in x', e reciprocamente sarà z ciò che divien z' se x' vi si aumenti di $x-x'$. Pertanto dal Teorema di Taylor avremo (966) $z=0=z'+(x-x')\left(\frac{dz'}{dx'}\right)+\frac{1}{2}(x-x')^2\left(\frac{d^2z'}{dx'^2}\right)+\frac{1}{2\cdot 3}(x-x')^3\left(\frac{d^3z'}{dx'^3}\right)+\text{ec}$; onde invertendo la serie potremo stabilire (389) $x-x'=P+Az'+Bz'^2+Cz'^3+\text{ec.}$ e $Fx=p+az'+bz'^2+cz'^3+\text{ec.}$, ovvero $Fx=Fx'+az'+bz'^2+cz'^3+\text{ec.}$, giacché $z'=0=z$ dà $x=x'$ e $p=Fx=Fx'$. Quindi se si ponga per comodo $Fx'=F'$ e $\Phi(x',y)=\Phi'$, e si differenzi in seguito per x', avremo

$$0=a\left(\frac{dz'}{dx'}\right)+2bz'\left(\frac{dz'}{dx'}\right)+3cz'^2\left(\frac{dz'}{dx'}\right)+\text{ec.}$$
$$+\left(\frac{dF'}{dx'}\right)+z'\left(\frac{da}{dx'}\right)+z'^2\left(\frac{db}{dx'}\right)+\text{ec.}$$

d' onde i valori di a, b, c, ec. (581), dai quali, poichè $\left(\frac{dz'}{dx'}\right)=1-\left(\frac{d\phi'}{dx'}\right)$ e $1:\left(\frac{dz'}{dx'}\right)=1+\left(\frac{d\phi'}{dx'}\right)+\left(\frac{d\phi'}{dx'}\right)^2+\left(\frac{d\phi'}{dx'}\right)^3+$ ec. si dedurrà facilmente

$$
\begin{aligned}
Fx=F'-z'\left(\frac{dF'}{dx'}\right)&-z'\left(\frac{d\phi'}{dx'}\right)\left(\frac{dF'}{dx'}\right)-z'\left(\frac{d\phi'}{dx'}\right)^2\left(\frac{dF'}{dx'}\right)-\text{ec.}\\
+\frac{z'^2}{2}\left(\frac{d^2F'}{dx'^2}\right)&+\frac{z'^2}{2}\left(\frac{d^2\phi'}{dx'^2}\right)\left(\frac{dF'}{dx'}\right)+\text{ec.}\\
&+z'^2\left(\frac{d\phi'}{dx'}\right)\left(\frac{d^2F'}{dx'^2}\right)+\text{ec.}\\
&-\frac{z'^3}{2.3}\left(\frac{d^3F'}{dx'^3}\right)\qquad-\text{ec.}
\end{aligned}
$$

Ora z' è arbitraria come lo è x', da cui dipende: può dunque eguagliarsi a $-\phi'$, e allora avremo manifestamente $Fx=F'+\phi'\left(\frac{dF'}{dx'}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{d(\phi'^2dF')}{dx'^2}\right)+\frac{1}{2.3}\left(\frac{d^2(\phi'^3dF')}{dx'^3}\right)+$ec.

975. Quanto ad F' e ϕ', esse sono ciò che divengono Fx, $\phi(r, y)$ postovi x' in luogo di x; e siccome $z'=-\phi'$ dà $x'=fy$, si avran dunque F' e ϕ' ponendo fy in luogo di x in Fx, $\phi(x,y)$; nel qual caso è manifesto, che fatto nel secondo membro $Fx=F$, $\phi(r, y)=\phi$, l' equazione precedente può anche mettersi nella seguente forma $Fx=F+\phi\left(\frac{dF}{dx}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{d(\phi^2dF)}{dx^2}\right)+\frac{1}{2.3}\left(\frac{d^2(\phi^3dF)}{dx^3}\right)+$ ec. a condizione che a differenziazioni finite si ponga nel secondo membro fy in luogo di x.

976. Se per altro $fy=y$ e $\phi=\phi x$, si avrà senza condizione veruna $Fx=Fy+\phi y.\frac{dFy}{dy}+\frac{d(\phi^2y.dFy)}{2dy^2}+\frac{d^2(\phi^3y.dFy)}{2.3dy^3}+$ec, elegantissima formula dell' insigne nostro italiano *La-Grange;* e se di più $Fx=x$, nel qual caso $\frac{dFy}{dy}=1$, si avrà $x=y+\phi y+\frac{d(\phi^2y)}{2dy}+\frac{d^2(\phi^3y)}{2.3dy^2}+\frac{d^3(\phi^4y)}{2.3.4dy^3}+$ec., cioè fatta $\phi y=\phi$, $\phi'y=\phi'$, $\phi''y=\phi''$ ec., e presi otto soli termini,

$$x=y+\Phi(1+\Phi'+\Phi'^2+\Phi'^3+\Phi'^4+\Phi'^5+\Phi'^6+\Phi'^7)$$

$$+\tfrac{1}{2}\Phi^2\Phi''(1+3\Phi'+6\Phi'^2+10\Phi'^3+15\Phi'^4+21\Phi'^5)$$

$$+\frac{1}{2.3}\Phi^3\Phi'''(1+4\Phi'+10\Phi'^2+20\Phi'^3+35\Phi'^4)$$

$$+\tfrac{1}{2}\Phi^3\left(\frac{1}{3.4}\Phi\Phi^{\text{iv}}+\Phi''^2\right)(1+5\Phi'+15\Phi'^2+35\Phi'^3)$$

$$+\frac{1}{3.4}\Phi^4\left(\frac{2}{2.5}\Phi\Phi^{\text{v}}+5\Phi''\Phi'''\right)(1+6\Phi'+21\Phi'^2)$$

$$+\frac{1}{2.4}\Phi^4\left(\frac{1}{3.5.6}\Phi^2\Phi^{\text{vi}}+5\Phi''^3+\tfrac{2}{3}\Phi\Phi'''^2+\Phi\Phi''\Phi^{\text{iv}}\right)(1+7\Phi')$$

$$+\frac{1}{2.4}\Phi^5\left(\frac{1}{3.5.6.7}\Phi^2\Phi^{\text{vii}}+7\Phi''^2\Phi'''+\frac{7}{2.3^2}\Phi\Phi'''\Phi^{\text{iv}}+\frac{7}{5.6}\Phi\Phi''\Phi^{\text{v}}\right)$$

977. Sciogliesi da questa formula per approssimazione l' equazion generale $0=a+bx+cx^2+dx^3+$ec. di qualunque grado m, che divisa per b e fattovi $y=-\frac{a}{b}$, $\Phi x=-\frac{cx^2+dx^3+\text{ec.}}{b}$, diviene della forma $x=y+\Phi x$. In tal caso dovrà farsi $\Phi y=-\frac{cy^2+dy^3+\text{ec.}}{b}$, e a operazione ultimata porsi $y=-\frac{a}{b}$. Se per esempio $m=2$, sarà $\Phi x=-\frac{cx^2}{b}$, e $\Phi y=-\frac{cy^2}{b}$. Sostituendo dunque, differenziando e ponendo infine $y=-\frac{a}{b}$, troveremo $x=-\frac{a}{b}-\frac{a^2c}{b^3}-\frac{4a^3c^2}{2b^5}-\frac{5.6a^4c^3}{2.3b^7}-$ ec. Si vedano le note IX, X, XI all' equazioni numeriche del citato *La Grange*, ove questa materia é diffusamente trattata.

Rotti i di cui termini si riducono a zero.

978. Si trovan talvolta delle espressioni algebriche in forma di rotti, che si riducono a $\frac{0}{0}$, come $\frac{x^2-a^2}{x-a}$ quando $x=a$. Questi resultamenti in apparenza indeterminati son suscettibili di valori determinati, ed ecco dei metodi per trovarli.

Sia $\frac{P}{Q}$ il rotto di cui si tratta, ed y il valor richiesto, sarà $\frac{P}{Q}$ $=y$, e di qui $yQ-P=o$, $ydQ+Qdy-dP=o$; ma per ipotesi $Q=o$, dunque $y=\frac{dP}{dQ}$. Che se anche da questa nuova espressione del rotto risulti $\frac{o}{o}$, si tratterà come l'altra, e ne avremo $y=\frac{d^2P}{d^2Q}$; e di qui nel caso medesimo $y=\frac{d^3P}{d^3Q}$. Sarà dunque in generale $y=\frac{d^nP}{d^nQ}$, essendo d^nP, d^nQ i primi differenziali, che non svaniranno nei casi, che rendon nulli P, Q. Ecco gli esempj.

I. Cerco il valor di $\frac{x^2-a^2}{x-a}$ quando $x=a$. Qui $P=x^2-a^2$, $Q=x-a$, $dP=2xdx$, $dQ=dx$ ed $y=\frac{2xdx}{dx}=2x=2a$.

II. La somma della progressione $x:x^2:x^3\dots:x^n$ é (329) $\frac{x^{n+1}-x}{x-1}$, e quando $x=1$, sarà $y=\frac{(n+1)x^n dx-dx}{dx}=n$.

III. Sia $\frac{\sqrt{(2a^3x-x^4)}-a\sqrt[3]{a^2x}}{a-\sqrt[4]{ax^3}}$ ed $x=a$. Avremo $y=$

$$\frac{(a^3-2x^3)\cdot\sqrt{(2a^3x-x^4)}-\frac{1}{3}a\sqrt[3]{\frac{a^2}{x^2}}}{-\frac{3}{4}\sqrt[4]{\frac{a}{x}}}=\frac{4}{3}(a+\frac{1}{3}a)=\frac{16}{9}a.$$

IV. Differenziata l'equazione $x+x^2+x^3+\dots\dots x^n=\frac{x^{n+1}-x}{x-1}$, si divida per $\frac{dx}{x}$ e verrà $x+2x^2+3x^3+\dots nx^n=\frac{x+x^{n+1}(nx-n-1)}{(x-1)^2}=\frac{o}{o}$, quando $x=1$. Dunque allora $y=\frac{1+x^n(nx(n+2)-(n+1)^2)}{2(x-1)}=\frac{o}{o}$: ma passando ai differenziali secondi si avrà $y=\frac{n(n+1).x^{n-1}(n(x-1)+2x-1)}{2}=\frac{n(n+1)}{2}$.

979. Ma se P o Q o ambedue insieme rappresentino un radicale, a qualunque numero si spingano le differenziazioni non potrà mai eliminarsi la quantità sotto il segno (923. 3.°), che si suppone andare a zero o in P o in Q o in ambedue, e che per conseguenza trovandosi o in qualità di fattore o di divisore o dell' uno e dell' altro in ciascuno dei nuovi rotti, gli renderà tutti o nulli o infiniti o sempre eguali a $\frac{0}{0}$. Osserveremo dunque per questi casi, che essendo $P=\Phi(x)$, $Q=\Phi'(x)$, si ha sempre $dP=\Phi(x+dx)-\Phi(x)$, $dQ=\Phi'(x+dx)-\Phi'(x)$ (915), ed $y=\frac{\Phi(x+dx)-\Phi(x)}{\Phi'(x+dx)-\Phi'(x)}$. Ma $\Phi(x)$, $\Phi'(x)$, si suppongon nulli; dunque $y=\frac{\Phi(x+dx)}{\Phi'(x+dx)}$; cioé basterà porre $x+dx$ in luogo di x, e quindi o la semplice riduzione, o lo sviluppo del radicale in serie portato fino a quella potenza di dx, che non si distruggerà da se stessa, darà il valor richiesto di y. Così nel caso di $y=\sqrt{\left(\frac{2a^2-3ax+x^2}{a-x}\right)}$ con $x=a$, avremo $y=\sqrt{\left(\frac{2a^2-3a(x+dx)+(x+dx)^2}{a-x-dx}\right)}=$ $\sqrt{(a-da)}=\sqrt{a}$.

Curve

980. Sia la curva qualunque $AM=s$ con l'ascissa
233 $AP=x$, l' ordinata $PM=y$, la tangente $TM=t$ e la normale $MN=n$, e debbano determinarsi t, n, la suttangente PT e la sunnormale PN. Condotta pm infinitamente vicina ad MP, ed Mr parallela ad AP, avremo $Mr=Pp=dx$, $mr=dy$, $Mm=ds$; e poichè l' arco ds è infinitesimo, potremo riguardarlo come una linea retta infinitesima, che sarà l' ipotenusa del triangolo parimente infinitesimo Mmr; avremo dunque $Mm=ds=\sqrt{(dx^2+dy^2)}$, e i triangoli simili Mmr, TMP, PMN daranno $Mm:mr:Mr::TM:PM:PT::MN:PN:PM$, cioè $ds:dy:dx::t:y:PT::n:PN:y$. Dunque $t=\frac{yds}{dy}$, $n=\frac{yds}{dx}$, $PT=\frac{ydx}{dy}$, $PN=\frac{ydy}{dx}$. Con ciò si avran-

no i valori di queste linee in ogni curva, che abbia le ordinate rettangole, e l'origine dell'ascisse al vertice, sol che dalla sua equazione differenziata si deduca il valore di ciascuna formula differenziale.

981. La supposizione che l'arco infinitesimo di una curva qualunque possa riguardarsi come una linea retta infinitesima, dipende dall'altra che ogni curva non sia se non un poligono di infiniti lati o di lati infinitamente piccoli. Così di fatto pensareno i primi fondatori del Calcolo differenziale sull' esempio del *Cavalieri*, che tutti precedè in questa idea nella sua *Geometria degli indivisibili*, idea che anche al dì d'oggi é comune alla maggior parte degli Analisti, specialmente qualora non si esiga un rigore assoluto nella maniera d'esprimersi; ed è poi di un uso costante e universale nelle Matematiche applicate alla Fisica ed alle arti. Generalmente però si conviene che questo principio non apparisce esser in ogni parte geometrico; ma con tuttociò non son men vere le conseguenze che se ne deducono, e che sempre si trovano coerentissime a quelle della più severa Geometria: il che dipende da quella specie di compensazione di cui abbiamo altrove parlato (909). Del rimanente questo stesso principio non é che un semplice corollario del principio infinitesimale, che a suo luogo esponemmo (906). Infatti se si concepisca un poligono rettilineo iscritto alla curva, i lati di questo potranno supporsi così piccoli, che la differenza fra essi e gli archi sottesi sia minore di qualunque quantità assegnabile. È dunque chiaro che la curva e il poligono dovranno in ultimo confondersi l'una con l'altro (548).

982. Ma ecco tre nuove maniere, con le quali anche indipendentemente dalla considerazione del triangolo infinitesimo può giungersi alle stesse espressioni generali della suttangente, tangente, sunnormale ec. La prima di queste maniere dipende dal principio dei limiti, l'altre non sono che applicazioni semplicissime del Teorema di Taylor (966).

I. Abbiasi dunque come sopra la curva AM, con le solite coordinate AP, MP e con la tangente MT al punto M, e si consideri non più infinitesimo, ma finito l'arco Mm, che perciò rap- 238
presenteremo con δs (910), come con δx, δy rappresenteremo

234 gli aumenti Pp, rm delle due coordinate AP, PM, allorchè da M passano al punto m. Condotta per m, M la secante mMS, i triangoli simili MPS, mrM danno $\frac{MP}{PS} = \frac{mr}{rM} = \frac{\delta y}{\delta x}$; e poichè $\frac{MP}{PT} > \frac{MP}{PS}$ (48), sarà $\frac{MP}{PT} > \frac{\delta y}{\delta x}$, e quanto più m si accosterà ad M, ed S a T, tanto meno differiranno fra loro le due ragioni $\frac{MP}{PT}$, $\frac{\delta y}{\delta x}$. Dunque l' una è limite dell' altra; e se si convenga che dx, dy rappresentino esclusivamente il valor delle differenze δx, δy allorchè il loro rapporto è pervenuto al limite della sua grandezza, oppure del suo impiccolimento avremo $\frac{MP}{PT} = \frac{y}{PT} = \frac{dy}{dx}$; d' onde per il valore della suttangente, $PT = \frac{y\,dx}{dy}$, come già si ebbe di sopra. Condotta in seguito MN normale ad MT, i triangoli simili TMP, PMN, TMN daranno $PN = \frac{y\,dy}{dx}$, $MT = \frac{y}{dy}\sqrt{(dx^2+dy^2)}$, $MN = \frac{y}{dy}\sqrt{(dx^2+dy^2)}$.

II. Sia $y = \varphi(x)$ l' equazione della curva AM; supposte al solito $AP = x$, $PM = y$ le coordinate del punto M, saranno $Ap = x+\delta x$, $pm = y+\delta y$ quelle di qualunque altro punto m, e fatta passare per M,m la secante SMm, avremo $tang$MSP$=tang\,m$M$r = \frac{\delta y}{\delta x}$ (676). Ora $\delta y =$ (913) $\varphi(x+\delta x)-\varphi(x) =$ (966) $\frac{dy}{dx}\delta x + \frac{d^2y}{2dx^2}\delta x^2 + \frac{d^3y}{2.3dx^3}\delta x^3$; dunque $tang$MSP$= \frac{dy}{dx} + \frac{d^2y}{2dx^2}\delta x + \frac{d^3y}{2.3dx^3}\delta x^2$ ec. Ma quando la secante divien tangente i due punti M, m si riuniscono, e si ha $\delta x = 0$, dunque allora $tang$MTP$= \frac{dy}{dx}$; d'onde per la suttangente TP il triangolo rettangolo TMP darà $TP = \frac{y\,dx}{dy}$.

235 III. S'immagini che la secante SMO girando intorno al punto M passi in S'MR, in modo che il tronco qualunque MQO della curva AMO resti compreso nell' angolo RMO. É manifesto

1.° che anche TMU tangente in M resterà compresa dentro lo stesso angolo RMO; 2.° che nel passaggio dall' una all' altra delle due prescritte situazioni la secante dovrà in qualche punto trovarsi interamente confusa con la tangente; 3.° che supposta $y=\varphi(x)$ l' equazione della curva riferita all' asse SP', e facendo $MP=y$, $AP=x$, $PP'=\delta x$, e chiamando infine a, a', a'' gli angoli MTP, MSP, MS'P, se si conduce RP' normale all' asse SP; avremo $NP'=y+\delta x\, tang\, a'$, $RP'=y+\delta x\, tang\, a''$, $QP'=\varphi(x+\delta x)=$ (966) $y+\frac{dy}{dx}\delta x+\frac{d^2y}{2dx^2}\delta x^2+\frac{d^3y}{2.3dx^3}\delta x^3+$ec., e quindi 1.° $QN=QP'-NP'=\left(\frac{dy}{dx}-tang\, a'\right)\delta x+\frac{d^2y}{2dx^2}\delta x^2+$ec.; 2.° $RQ=RP'-QP'=\left(tang\, a''-\frac{dy}{dx}\right)\delta x-\frac{d^2y}{2dx^2}\delta x^2-$ec., quantità che in forza della costruzione prescritta dovranno essere ambedue positive. Or poiché può prendersi δx in maniera che il primo termine di ciascuna delle suddette espressioni superi la somma dei rimanenti (969), é visibile che non potrà la prima esser sempre positiva se non sia $tang\, a'<\frac{dy}{dx}$, né potrà esserlo la seconda se non sia $tang\, a''>\frac{dy}{dx}$, cioé la tangente dell' angolo della secante con l' asse dovrà esser minore del rapporto $\frac{dy}{dx}$ allorché passa al di sotto della tangente, e dovrà esser maggiore quando è passata al di sopra. Dunque sarà eguale a $\frac{dy}{dx}$ allorché si confonde con la tangente, il che darà $tang\, a=\frac{dy}{dx}$ come sopra.

983. Si faccia adesso l' arco $AM=s$, e perciò $Mm'm=\delta s$. 234
Poiché l' arco varia con l' ascissa, dalla quale é dunque dipendente (911), potremo supporre $s=f(x)$, e quindi $\delta s=f(x+\delta x)-f(x)=$ (966) $\frac{ds}{dx}\delta x+\frac{d^2s}{2dx^2}\delta x^2+\frac{d^3s}{2.3dx^3}\delta x^3+$ec. Ora i triangoli MRr, Mmr danno $MR=\frac{Mr}{cos RMr}=\frac{\delta x}{cos MTP}=$(659. 14.ª) δx [illegible]

234 $tang^2MTP)=(982.\ II.)\delta x\sqrt{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)}$ e nel modo stesso $Mm=$ $\delta x\sqrt{(1+tang^2MSP)}=(ivi)\delta x\sqrt{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}+\delta x\frac{dy}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}+\text{ec.}\right)\right)}$: dunque fatto $\sqrt{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)}=F(x)$, e $\frac{dy}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}+\text{ec.}\right)+\text{ec.}=\omega$, avremo $MR=\delta x.F(x)$, $Mm=\delta x.F(x+\omega\delta x)=\delta xF(x)+\frac{d(Fx)}{dx}\omega\delta x^2+$ ec. Ma adoprando il raziocinio già fatto altrove (548) può dimostrarsi che MR, Mm sono l' una maggiore, l'altra minore dell' arco $Mtm=ds$, e perciò sono i limiti di quest' arco; quindi siccome la prima eguaglia il primo termine della seconda, dovrà a questo stesso termine essere eguale anche il primo del valore di ds, ed avremo in conseguenza $\frac{ds}{dx}=F(x)=\sqrt{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)}$ ossia $ds^2=dx^2+dy^2$, come precisamente vien dato dal triangolo infinitesimale (980).

984. Si venga agli esempj. Nel circolo $y^2=2ax-x^2$. Dunque $ydy=dx(a-x)$, e perciò $PN=\frac{ydy}{dx}=a-x$, $PT=\frac{ydx}{dy}=\frac{y^2}{a-x}$; $ds=\sqrt{(dx^2+dy^2)}=dx\times\sqrt{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)}=\frac{adx}{y}=\frac{ady}{a-x}$, onde $t=\frac{yds}{dy}=\frac{ay}{a-x}$, $n=\frac{yds}{dx}=a$, come già si sapeva (462).

985. Nella parabola $y^2=px$, e $2ydy=pdx$, dunque $\frac{ydy}{dx}=\frac{p}{2}$, $\frac{ydx}{dy}=2x$ (752). In generale $\frac{ydx}{dy}=\frac{mx}{n}$ se sia $y^m=x^na^{m-n}$, equazione che suol denominarsi *alla famiglia delle parabole* se m, n son positive, a quella *delle iperbole* se n sia negativa, e che diviene alla parabola *Apolloniana* o *ordinaria* se $m=2$, $n=1$, alla parabola cubica prima, seconda ec., se con $m=3$ sia $n=1$, $=2$, ec.

986. Nella logaritmica $x = A \log y$ (806), $dx = \frac{A dy}{y}$ ed $\frac{y dx}{dy} =$ A; cioè *la suttangente eguaglia il modulo*.

987. Nella Quadratrice preso per asse $CD = \frac{1}{c}$ (811), e fatto $OD = x$, $MO = y$, e cangiate perciò nell' equazione (810) x in 172
$1 - y$, y in $\frac{1}{c} - x$ avremo $\frac{1}{c} - x = y \, tang \, c(1 - y)$. Quindi $dx = -dy \, tang \, c(1 - y) + \frac{c y dy}{cos^2 c(1 - y)}$, e la suttangente $OT = \frac{y dx}{dy} = -y \, tang \, c(1 - y) + \frac{c y^2}{cos^2 c(1 - y)}$. Per conseguenza $CT = CO + OT = \frac{1}{c} - x + OT = \frac{c y^2}{cos^2 c(1 - y)}$. Ora VB$(cos \, c(1 - y))$:CB(1)::OM$(y)$:MC$= \frac{y}{cos \, c(1 - y)}$. Dunque $CT = c.CM^2 = (811) \frac{CM^2}{CD}$.

988. Nella Cicloide ove $y = PM =$ (808) $u + sen \, u$, ed $x =$ 256
$PB = sen \, v.u$, oppure $y = au + a \, sen u$, ed $x = a \, sen \, v.u$, se il circolo genitore sia del raggio a (549. 634), avremo in quest' ultimo caso $u = arc.sen \, v. \frac{x}{a}$ e sarà $dy = du(a + a \cos u) = du(2a - x)$(651) $= \frac{dx(2a - x)}{\sqrt{(2ax - x^2)}}$ (951. 7.°)$= dx \sqrt{\frac{2a - x}{x}}$. Ma se si prendano l' ascisse sull' asse Aa e si faccia $AF = x$, $FM = y$, si cangerà dx in $-dy$, dy in $-dx$, $2a - x$ in y ed x in $2a - y$, e sarà $dy = dx \sqrt{\frac{2a - y}{y}}$ altra equazione differenziale della cicloide. Dalla prima si avrà $\frac{y dx}{dy} = \sqrt{\frac{y^2 x}{2a - x}}$, dalla seconda $MN = \frac{y ds}{dx} = \sqrt{2ay} =$ (529. 3.°) OD. Son dunque parallele MN ed OD, e per conseguenza anche OB e la tangente MT, l' una normale ad OD (492. 2.°), l' altra ad MN (462. 1.°). Inoltre condotta pm infinitamente vicina a PM, ed Mr parallela ad OT tangente in O all' arco OIB, avremo $ro = MO = u$, ed $mr = du = Oo = Mr$, cioè sarà isoscele il triangolo mrM, e perciò anche l' altro MOT, ed MO=OT.

989. Ma si abbia una curva CKM tale che descritto col
173 centro C e raggio $CN=a$ il circolo ADBNA, la porzione $CM=y$ di CN sia una funzione qualunque dell'arco $ADBN=x$ intercetto fra CN e un punto o dato o arbitrario A della circonferenza. Immagino la retta TM tangente in M, il raggio Cn infinitamente vicino a CN, la CT normale a CM prodotta fino in T suo incontro con MT e il circolo OEQMO, descritto col centro in C e raggio CM. I triangoli simili CMr, CNn e Mmr, CTM daranno $CN(a):CM(y)::Nn(dx):Mr=\frac{ydx}{a}$; $mr(dy):Mr\left(\frac{ydx}{a}\right):Mm(ds)::MC(y):CT:MT$. Dunque $CT=\frac{y^2dx}{ady}$, $MT=\frac{yds}{dy}$. Sia per esempio $y=\frac{ax}{\pi}$, la curva CKM sarà la spirale di Archimede (815), e si avrà $\frac{dx}{dy}=\frac{\pi}{a}$, e $CT=\frac{y^2\pi}{a^2}=\frac{xy}{a}=OEQM$.

175 990. Sia la spirale iperbolica in cui $xy=ab$ (818). Si avrà $xdy+ydx=0$, e $CT=-\frac{xydy}{ady}=-\frac{xy}{a}=-b$.

176 991. Nella spirale logaritmica, ove l'angolo CMT è costante (819) fatto $tang\,CMT=t$, il triangolo CMT in cui $CM=y$ dà immediatamente $CT=ty$. Sarà frattanto $ty=\frac{y^2dx}{ady}$, $\frac{dy}{y}=\frac{dx}{at}$; e integrando, $ly=\frac{x}{at}+C=\frac{x}{at}le+lC$(410. 946. 1.°)$=lCe^{\frac{x}{at}}$(400. 1.° 401. 3.°), onde $y=Ce^{\frac{x}{at}}$ equazione a questa curva, da cui s'impara 1.° che la spirale fa un'infinità di rivoluzioni intorno al suo centro tanto per accostarsene che per allontanarsene; poichè se x divenga $x\pm\pi$, $x\pm2\pi$, $x\pm3\pi$, ec. y è sempre reale: 2.° che in A ove $x=0$, si ha $CD=y=C$: 3.° che se $t=\infty$ si ha $y=C$, cioè la spirale diviene una circonferenza, che, come appunto si sa, taglia tutti i suoi raggi ad angolo retto.

992. Sieno $y=f(x)$, $z=F(\omega)$ l' equazioni di due curve che chiameremo A , B riferite ai medesimi assi . Se si assume $\omega=a+x$, le ordinate y, z coincideranno l' una sull' altra ; ed aumentate ambedue le ascisse della quantità δx avremo per le coordinate corrispondenti Y, Z che del pari coincideranno (966)

$$Y=y+\frac{dy}{dx}\delta x+\frac{d^2y}{2dx^2}\delta x^2+\frac{d^3y}{2.3dx^3}\delta x^3+\frac{d^4y}{2.3.4dx^4}\delta x^4+\text{ec.}$$

$$Z=z+\frac{dz}{d\omega}\delta x+\frac{d^2z}{2d\omega^2}\delta x^2+\frac{d^3z}{2.3d\omega^3}\delta x^3+\frac{d^4z}{2.3.4d\omega^4}\delta x^4+\text{ec.}$$

Or si supponga che posto $\omega=p$ risulti $z=y$: le due curve avranno in questo caso un punto comune, nel quale s' intersecheranno ; e gli altri loro punti consecutivi si troveranno distanti fra loro nel senso dell'asse delle ordinate di una quantità $D=Y-Z=$ $\left(\frac{dy}{dx}-\frac{dz}{d\omega}\right)\delta x+\left(\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{d^2z}{d\omega^2}\right)\frac{\delta x^2}{2}+\left(\frac{d^3y}{dx^3}-\frac{d^3z}{d\omega^3}\right)\frac{\delta x^3}{2.3}+\text{ec.}$

993. Che se la supposizione di $\omega=p$ non solo renda $z=y$, ma dia inoltre $\frac{dy}{dx}-\frac{dz}{d\omega}=0$, la differenza D si cangerà in $D'=$ $\left(\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{d^2z}{d\omega^2}\right)\frac{\delta x^2}{2}+\left(\frac{d^3y}{dx^3}-\frac{d^3z}{d\omega^3}\right)\frac{\delta x^3}{2.3}+\text{ec.}$, e poiché può farsi in modo che il primo termine in D superi la somma di tutti i seguenti (969), sarà $D'<D$, e l' intersezione si permuterà in un contatto, ossia le due curve diverranno tangenti fra loro. Infatti é agevole il concepire che una curva , la quale sia tangente ad un' altra in un punto qualunque, non può divenir secante in quel punto se non elevandosi con uno dei suoi rami al di sopra della curva di contatto, per poter con l' altro abbassarsi e penetrare al di sotto. Quindi nella parte del ramo elevatò crescerà la distanza di punto a punto fra le due curve, e sarà necessariamente maggiore di quella che ha luogo quando le due curve si toccano. Dunque all' opposto le due curve dovranno essere fra di loro tangenti quando la distanza D' dei loro punti é minore di qualunque altro valore di D . Se poi lo stesso valore di $\omega=p$ soddisfaccia insieme anche all' equazione $\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{d^2z}{d\omega^2}=0$, il contatto

si chiamerà allora di *second' ordine*; e in generale si chiamerà dell' ordine n^{simo}, se la stessa condizione annulli n termini in D.

994. Tutto questo premesso, sieno come sopra (992) x, y le coordinate della curva A, e si supponga ridotta alla forma $F(\omega, z, a, b, \text{ec.})=o$ l' equazione della curva B, ove a, b, ec. sono le costanti arbitrarie, dalle quali, siccome si sa, dipendono insieme e le dimensioni e la posizione della curva. Se queste costanti sieno due sole e si determinino mediante l'equazioni $F(x,y,a,b)=o$, $\frac{dF(x, y, a, b)}{dx}=o$, la curva B sarà tangente alla curva A; perché quando $\omega=x$, in virtù della prima equazione risulta $z=y$, e in virtù della seconda $\frac{dz}{d\omega}=\frac{dy}{dx}$.

Se le costanti sieno tre e si determinino mediante le tre equazioni $F(x,y,a,b,c)=o$, $\frac{dF(x,y,a,b,c)}{dx}=o$, $\frac{d^2F(x,y,a,b,c)}{dx^2}=o$, la curva B avrà un contatto di secondo ordine; perchè quando $z=y$ si avrà $\frac{dz}{d\omega}=\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2z}{d\omega^2}=\frac{d^2y}{dx^2}$; e così di seguito per i contatti d' ordini superiori.

995. L' equazione alla linea retta dovendo esser di primo grado (848), e quindi della forma $z=a\omega+b$, e non contenendo perciò che due costanti arbitrarie, ne risulta che la linea retta non può avere con una curva qualunque che un contatto di primo ordine; e per ottenerlo dovremo determinar le costanti per mezzo delle equazioni $y-ax-b=o$, $\frac{dy}{dx}-a=o$, che danno $a=\frac{dy}{dx}$, $b=y-\frac{xdy}{dx}$. La prima di queste equazioni concorda con l'altra già trovata (982.II.), essendo facile il dimostrare che la costante a corrisponde alla tangente dell' angolo della retta con l' asse delle ascisse (848).

996. Il circolo, la cui equazione più generale é $(\omega-a)^2+(z-b)^2=r^2$, nella quale a, b sono le coordinate del centro, é auscettibile, attese le tre costanti, di un contatto di secondo' ordine, che avremo determinando quelle per mezzo delle tre equazioni $(x-a)^2+(y-b)^2-r^2=o$, $x-a+(y-b)\times$

$\frac{dy}{dx}=o$, $1+(y-b)\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy^2}{dx^2}=o$, le quali danno $b=y+\frac{ds^2}{d^2y}$, $a=x-\frac{ds^2dy}{dxd^2y}$, $r=\mp\frac{ds^3}{dxd^2y}$, dei quali valori i primi due stabiliscono la posizione dovuta al centro del circolo cercato, l'ultimo ne assegna il raggio, d' onde intanto apparisce che il circolo al quale appartiene un contatto di second' ordine, e a cui si dà il nome di *circolo osculatore*, non può essere che un solo per ciascun punto M della curva.

997. Che se non si faccia uso della terza equazione e si lasci r indeterminata, avremo $a=x\pm\frac{rdy}{ds}$, $b=y\mp\frac{rdx}{ds}$, ed a, b saranno in tal caso le coordinate del centro di tutti i circoli, i quali goderanno semplicemente di un contatto di primo ordine (994), e che potranno essere infiniti di numero, attesa l' infinità dei valori di cui è suscettibile l' indeterminata r. Niuno di questi potrà peraltro passare fra la curva e il circolo osculatore, poichè il valore di D in quest' ultimo mancando del primo e secondo termine è minore che in tutti gli altri.

998. Se col mezzo dei valori di a, b si elimina r, avremo $b\frac{dy}{dx}=y\frac{dy}{dx}+x-a$, equazione al luogo geometrico dei centri di tutti quei circoli che hanno un contatto di primo ordine con la curva data in uno stesso punto M. E quest' equazione mostra 1.° che questi centri saranno tutti in una medesima retta (821); 2.° che questa retta sarà normale alla curva in M, e per meglio dire alla retta tangente in M alla curva. Infatti se sulla normale MN si prenda un punto qualunque Q, e si chiamino a, b le coordinate di Q, ed x, y quelle di M, condotta RQ parallela all' asse AN, avremo MR $(y-b)$: RQ $(a-x)$: : MP(y) : PN$\left(\frac{ydy}{dx}\right)$ (980); d' onde $\frac{bdy}{dx}=\frac{ydy}{dx}+x-a$ come sopra. Quindi 255
3.° anche il raggio del circolo osculatore, al di cui centro appartengono egualmente le coordinate a, b, è necessariamente normale alla curva o alla sua tangente in M. 4.° Perciò se la tangente al vertice della curva è normale all' asse, il raggio osculatore si confonderà in quel punto con l' asse medesimo, e se ne avrà il valore ponendo $x=o$ in quello di r.

999. Infine si osserverà 1.° che l' uno dei segni di r vale per il caso che il contatto segua dalla parte concava della curva, l' altro nel caso opposto; 2.° che avendosi $ds^2=dx^2+dy^2$, e perciò nel caso di dx costante, quale viene assunto nella formula generale (996), $ddy=\frac{dsdds}{dy}$, introdotto questo valore in r, avremo $r=\mp\frac{dyds^2}{dxdds}=(929)\pm dy:d\frac{dx}{ds}$, altra e più generale espressione del raggio osculatore; 3.° Se le ordinate partono da un medesimo punto (989), il raziocinio che determina il valore di r non cangerà; se non che avendosi in questo caso (*ivi*) $Mr=\frac{ydx}{a}$, dovremo permutar dx in questo nuovo valore, il che dà $r=dy:d\frac{ydx}{ads}$, cioè supposto dx costante $r=\frac{adyds^2}{dx(dsdy-ydds)}$; ovvero fatta $a=y$, cioè presa l' ordinata y per raggio del circolo delle ascisse $r=\frac{ydyds^2}{dx(dsdy-ydds)}=\frac{yds^3}{dxds^2-ydxddy}$.

237 1000. Abbiasi adesso la curva AM col raggio osculatore CM che faccia con l' asse AQ delle ascisse o con OC parallela ad AQ l' angolo MNA=MCO=β. Se fatto centro in C con lo stesso raggio CM si descriva l' arco circolare infinitesimo Mq, e per q, C si conduca fino alla curva la mC, e inoltre da m, M le mr, Mr nel senso delle coordinate y, x, avremo l' angolo MCm=$d\beta$, l' arco $Mq=rd\beta$ (549). Ma il triangolo Mmr dà $sen\,\beta=\frac{dx}{ds}$; dunque (931. 1.°) $Mq=rd\frac{dx}{ds}:\sqrt{\left(1-\frac{dx^2}{ds^2}\right)}=r\frac{ds}{dy}d\frac{dx}{ds}=ds$, cioè l' arco circolare eguaglierà quello della curva, col quale si confonderà interamente, e perciò 1.° ogni curva può riguardarsi come formata dal seguito successivo di archi circolari infinitesimi che hanno per raggio il raggio osculatore corrispondente a ciascun dei suoi punti; 2.° due raggi osculatori contigui l' uno all' altro, o spettanti alle due estremità di un arco infinitesimo della curva, sono eguali fra loro; 3.° se ai punti contigui M, m si conducano le MN, mn normali alla curva, queste si confonderanno coi raggi osculatori in M, m (998. 3.°) e prolungate al di sotto dell' asse AQ determineranno col loro concorso C il centro del

circolo osculatore in M; 4.° per sapere in qual punto una curva data abbia la massima curvatura basterà trovare col metodo che presto insegneremo il minimo raggio osculatore, giacchè le curvature stanno in ragione inversa dei raggi.

1001. Poichè il valore di r é dato per le differenziali dx, dy, ds della curva AM, potremo avere in ciascuna curva l' espressione del raggio osculatore, ponendo in r i valori di queste differenziali presi dall' equazione della medesima. Abbiasi l' equazione generale delle sezioni coniche $y^2 = px \pm \frac{px^2}{2a}$ (744). Differenziando, presa dx costante, si ha $2ydy = pdx \pm \frac{pxdx}{a}$, e $2yddy + 2dy^2 = \pm\frac{pdx^2}{a}$; onde $dy = \frac{pdx}{2ay}(a \pm x)$, e $ddy = -\frac{p^2dx^2}{4y^3}$. Dunque $r\left(=\frac{ds^3}{-dx\,ddy}\right) = \frac{4y^3ds^3}{p^2dx^3} = (980)\,\frac{4n^3}{p^2} = (753.\ 770.\ 787)\ \frac{pz^3}{2q^3}$ in tutte le sezioni coniche.

Avremo ancora $ds = \sqrt{(dx^2+dy^2)} = \frac{dx}{2ay}\sqrt{(4a^2y^2+p^2(a\pm x)^2)}$; e quindi $r = \frac{1}{2a^3p^2}\sqrt{(4a^2y^2+p^2(a\pm x)^2)^3}$, che fatto $x=0$, e per conseguenza in forza dell' equazione generale $y=0$, dà $r = \frac{1}{2a^3p^2}\sqrt{p^6a^6} = \frac{p}{2}$ raggio osculatore al vertice della curva.

1002. Dunque nel circolo ove $p=2a$ (745) $=2n$ (536), si ha $r = n = \frac{p}{2} = a$; onde i raggi osculatori son tutti eguali al raggio del circolo, come é d' altronde evidente.

Nella parabola, poiché $MN^2 = TN \times PN$ (529. 3.°) e $PN = 238
\frac{p}{2}$ (752), sarà $r = MC\left(=\frac{4MN^3}{p^2}\right) = NT \times \frac{MN}{PN}$ ed $MN : NP :: MC . NT = CO = PQ = 2x + \frac{p}{2}$ (752); dunque $QN = 2x$, $AQ = 3x + \frac{p}{2} = 3x + AB$; onde $BQ = 3x$. Preso dunque $BQ = 3AP$, e condotta CQ perpendicolare ad AQ, il punto di concorso C delle due MC, CQ sarà il centro del circolo osculatore.

236 1003. Nella cicloide (988) $dy = dx\sqrt{\frac{2a-x}{x}}$, e posta dx costante, $ddy = -\frac{adx^2}{x\sqrt{(2ax-x^2)}}$, $dx^2+dy^2 = \frac{2adx^2}{x}$. Dunque $r = \frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{-dxddy} = 2\sqrt{2a(2a-x)} = 2OD = 2MN$ (988), ed $MN = NC$; quindi 1.° nel punto A ove $x = 2a$ avremo $r = 0$; 2.° nel punto B ove $x = 0$ avremo $r = 4a = 2BD$.

239 1004. Sia la spirale logaritmica ADM in cui $t = \frac{ydx}{ady}$ (991), ovvero $dy = \frac{dx}{t}$, fatto y il raggio arbitrario a; differenziando supposta dx costante si avrà $ddy = 0$, e il raggio osculatore $r = \frac{yds}{dx}$ (999. 3.°); onde condotte AC, MC normali ad MA e alla tangente in M, il loro punto d'incontro C determinerà il centro del circolo osculatore; perchè $Mr(dx) : Mm(ds) :: AM(y) : MC$.

Piani tangenti

1005. Sieno $z = \phi(x,y)$, $z' = Ax' + By' + C$ l'equazioni di una superficie curva (729) e di un piano (854), con le coordinate riferite ai medesimi assi, e vogliansi i valori da darsi ai coefficienti A, B, C perchè il piano risulti tangente alla curva in un punto dato. Dovrà in questo punto aversi $z' = z$, $x' = x$, $y' = y$, e quindi $Ax + By + C = z = \phi(x,y)$ equazione con la quale potremo determinare intanto una delle tre incognite.

Quanto alle due rimanenti, osserveremo che per un altro punto della curva, per il quale le coordinate x, y si cangino in $x + \delta x$, $y + \delta y$, si avrà (972) $Z = \phi(x+\delta x, y+\delta y) = z + \delta x\left(\frac{dz}{dx}\right) + \delta y\left(\frac{dz}{dy}\right) + \frac{\delta x^2}{2}\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) + \delta x\delta y\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right) + \frac{\delta y^2}{2}\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) +$ ec; mentre aumentando delle stesse quantità le corrispondenti coordinate x, y del piano avremo $Z' = A(x+\delta x) + B(y+\delta y) + C$. Dunque la distanza del piano a quel punto qualunque della curva che ha per coordinate $x+\delta x$, $y+\delta y$, $z+\delta z$, presa nel senso

delle z, sarà $D=Z-Z'=\delta x\left(\left(\frac{dz}{dx}\right)-A\right)+\delta y\left(\left(\frac{dz}{dy}\right)-B\right)+$
$\frac{\delta x^2}{2}\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)+\delta x\delta y\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)+\frac{\delta y^2}{2}\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)+\text{ec.}$

1006. Ora applicando il raziocinio già fatto altrove (993) troveremo che nel caso del piano tangente deve questa distanza esser più piccola che in ogni altra situazione del piano. Ma il valore di $Z-Z'$ dipende specialmente da quello dei due primi termini, che per la ragione più volte ripetuta posson rendersi tali da superare la somma di tutti i seguenti; dunque nel caso di contatto dovrà aversi $\delta x\left(\left(\frac{dz}{dx}\right)-A\right)+\delta y\left(\left(\frac{dz}{dy}\right)-B\right)=0$, ovvero attesa l'indipendenza delle variabili (958) $\left(\frac{dz}{dx}\right)-A=0$, $\left(\frac{dz}{dy}\right)-B=0$, d'onde i valori A, B che sostituiti in $Ax+By+C=Z$, danno $C=z-x\left(\frac{dz}{dx}\right)-y\left(\frac{dz}{dy}\right)$, e quindi per l'equazione cercata del piano tangente $z'=z+(x'-x)\left(\frac{dz}{dx}\right)+(y'-y)\left(\frac{dz}{dy}\right)$.

1007. Volendo l'angolo θ di questo piano con quello delle x, y, rammenteremo che per l'angolo di due piani qualunque, le cui equazioni sieno $z=Ax+By+C$, $z'=A'x+B'y+C'$ si ha (860. XI.) $\cos\theta=\frac{1+AA'+BB'}{\sqrt{(1+A^2+B^2)}\sqrt{(1+A'^2+B'^2)}}$; ma nel caso che uno dei piani sia quello delle x, y abbiamo (854. 1.°) $A'=0$, $B'=0$, dunque $\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{(1+A^2+B^2)}}=\frac{1}{\sqrt{\left(1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right)}}$.

Evolute

1008. Se un filo ABC applicato sopra una curva BC, nella cui origine è la tangente AB, si sviluppi, tenendolo egualmente 221
teso, la sua estremità A descriverà una curva $AM=s$, in cui 1.° $AB+arc.BC=MC$; 2.° ciascun elemento infinitesimo e circolare Mm (1000. 1.°) avrà per raggio MC, che perciò corrisponderà

ad r raggio osculatore nel punto qualunque M della curva AM;
237 3.° la curva AB sulla quale costantemente si trova l' estremità C di MC sarà il luogo geometrico di tutti i centri dei circoli osculatori della curva AM; e per conseguenza 4.° sarà pure il luogo dei punti di concorso di MN, mn normali alla curva AM, ed infinitamente vicine fra loro (1000. 3.°). Ora la curva BC dicesi l' *evoluta* o *sviluppata* della curva AM, e questa dicesi la *sviluppante* della curva BC.

1009. Per trovar l' equazione dell' evoluta pongo $AB=b$, l' ascissa $BQ=t$ e l' ordinata $QC=z$, e poichè il triangolo MCO dà $MO=z+y=r\,sen\,MCO=\frac{rdx}{ds}$ (1000), e $CO=t-x+b=r\,sen\,CMO=r\,sen\,mMr=\frac{rdy}{ds}$; dunque sostituito il valore di r, con dx costante, avremo $z=\frac{ds^2}{-ddy}-y$, $t=\frac{dyds^2}{-dxddy}+x-b$, valori che con l' equazion della curva AM danno quella dell' evoluta. Si avverta 1.° che la costante b corrisponde al raggio del circolo osculatore sull' origine della curva AM, e se ne otterrà il valore col metodo già indicato (998. 4.°); 2.° che posto $x+b$ in luogo di x, e riguardando come negativa l' ordinata z, rapporto all' asse AQ, i valori trovati coincidono con quelli delle coordinate al centro di qualunque dei circoli osculatori (996), il che verifica come questi centri hanno per luogo geometrico l' evoluta (1008. 3.°). Ma passiamo agli esempj.

1010. Nel circolo ove $b=a$ (1009. 1.° 1001), $ds^2=(984)\,\frac{a^2dx^2}{y^2}$, $ddy=(1001)-\frac{p^2dx^2}{4y^3}=-\frac{a^2dx^2}{y^3}$, onde $\frac{ds^2}{-ddy}=y$, sarà $z=y-y=0$, $t=\frac{ydy}{dx}+x-a=(984)\,a-x+x-a=0$. Quindi il circolo ha per evoluta il suo stesso centro.

238 1011. Nella parabola sia $BQ(=3x\,(1002))=t$, $CQ=z$, si avrà $NF\left(\frac{p}{2}\right)\,PM(y)::NQ(2x):QC=z=\frac{4xy}{p}=\frac{4x\sqrt{px}}{p}$, onde $\frac{pz^2}{16}=x^3=\frac{t^3}{27}$, e $t^3=\frac{27pz^2}{16}$, cioè *l' evoluta della parabola ordinaria è*.

una seconda parabola cubica (985), *il cui parametro è* $\frac{27}{16}$ *di* 238
quello della data. Ora nelle evolute, AB+BC=MC(1005. 5.°); dunque $BC=MC-\frac{p}{2}=\frac{4MN^3}{p^2}-\frac{p}{2}$, ma $MN=\sqrt{\left(px+\frac{p^2}{4}\right)}$ (752) $=\frac{p}{2}\sqrt{\left(\frac{4x}{p}+1\right)}$; dunque facendo $p=\frac{16a}{27}$ ed $x=\frac{t}{3}$, onde $MN=\frac{8a}{27}\sqrt{\left(\frac{9t}{4a}+1\right)}$, si ha $BC=\frac{8a}{27}\left(\left(1+\frac{9t}{4a}\right)^{\frac{3}{2}}-1\right)$, espressione di un arco qualunque della seconda parabola cubica, la cui equazione è $t^3=az^2$.

1012. Nella cicloide, preso per asse Aa, da $dy=$ (988) 236
$dx\sqrt{\frac{2a-y}{y}}$ viene $ddy=-\frac{adx^2}{y^2}$, $dx^2+dy^2=\frac{2adx^2}{y}$, onde $z=$ (1009) $\frac{dx^2+dy^2}{-ddy}-y=y$, e $t=x-b+\frac{dy(dx^2+dy^2)}{-dxddy}=x+2\sqrt{(2ay-y^2)}$, per esser $b=0$ (1003. 1.°). Dunque $dt=dx\frac{2a-y}{y}=dy\sqrt{\frac{2a-y}{y}}=dz\sqrt{\frac{2a-z}{z}}$ equazione a una cicloide dell'asse $2a$ eguale per conseguenza alla data. Si osserverà che in B avendosi $r=4a=2BD$ (1003. 2.°) sarà dunque ACE=AMB=2BD (1005. 5.°), e l'intera ABa=4BD, cioè l'*arco intero della cicloide è quadruplo del diametro del circolo genitore*.

1013. Nella spirale logaritmica, poichè MC è normale ad 239
MT ed AC normale ad MA (1004), sarà l'angolo ACM=AMT (529); onde l'evoluta ABC è la medesima spirale logaritmica ADM (818). Quindi (991. 1.°) la tangente MC è eguale alla spirale ABC, benchè questa faccia un infinità di rivoluzioni intorno al punto A; dunque del pari condotta AT perpendicolare ad AM, sarà MT= all'arco ADM; onde *la spirale logaritmica e la cicloide sono evolute di se medesime*.

Massimi e Minimi

1014. Abbiasi l'equazione $y=\phi(x)$, e voglia determinarsi il valore di x che rende y massima o minima. Supposti $x\pm\delta x$

due valori l' uno immediatamente maggiore, l' altro immediatamente minore di x, e chiamati y', $'y$ i corrispondenti di y, avremo dal solito Teorema di Taylor

$$y'=y+\frac{dy}{dx}\delta x+\frac{d^2y}{2dx^2}\delta x^2+\frac{d^3y}{2.3dx^3}\delta x^3+\frac{d^4y}{2.3.4dx^4}\delta x^4+ec.$$

$$'y=y-\frac{dy}{dx}\delta x+\frac{d^2y}{2dx^2}\delta x^2-\frac{d^3y}{2.3dx^3}\delta x^3+\frac{d^4y}{2.3.4dx^4}\delta x^4+ec.$$

Ora in virtù del noto principio (969), e attesa la differenza di segno che in y', $'y$ ha il termine $\frac{dy}{dx}\delta x$ è evidente che se x non sia tale da rendere $\frac{dy}{dx}=0$, le due quantità y', $'y$ saranno l' una maggiore, l' altra minore di y, la qual funzione non potrà dunque in tal caso esser nè massima, né minima. Perciò 1.° *il valor di* x, *che rende* y *massima o minima, si ha dall' equazione differenziale* $\frac{dy}{dx}=0$; 2.° da questo valore avremo avuto un massimo, se differenziando nuovamente si trovi che $\frac{d^2y}{dx^2}$ o risulta naturalmente negativo, o tale diviene ponendovi il valor trovato di x; nel caso opposto si sarà avuto un minimo. Ecco gli esempj.

I. Dividere una retta $2a$ in due parti x, $2a-x$ tali, che il loro rettangolo $y=x(2a-x)$ sia un massimo. Dovrà farsi $\frac{dy}{dx}=2a-2x=0$. Dunque $x=a$ ed $y=a^2$ che é un massimo, poiché $\frac{d^2y}{dx^2}=-2$, quantità negativa.

II. Trovar due diametri conjugati m, n dell' ellisse, che faccian tra loro il minimo angolo p. Si avrà (774) $mn\,sen\,p=ab$ ed $m^2+n^2=a^2+b^2$, onde $sen\,p=\frac{ab}{n\sqrt{(a^2+b^2-n^2)}}$ e $\frac{d\,sen\,p}{dn}=-\frac{ab(a^2+b^2-2n^2)}{n^2(\sqrt{a^2+b^2-n^2})^3}=0=-a^2-b^2+2n^2$. Dunque $n=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}=m$, soluzione che dà un minimo, perché $\frac{d^2sen\,p}{dn^2}=4n$, quantità positiva. Sicché i diametri conjugati ed eguali dell' ellisse formano con la loro intersezione il minimo angolo cercato, cui seno é

$\frac{2ab}{a^2+b^2}$. Perciò se $\frac{b}{a}=tang\,q=tang\,CaB$ (676), sarà $sen\,p=\frac{2\,tang\,q}{1+tang^2 q}=$ 142
$\frac{2\,tang\,q}{sec^2 q}=2\,sen\,q\cos q=sen\,2q$, onde $p=2q=Bab$.

III. Dato il triangolo isoscele DCB normale al semicircolo DMB condurre AP parallela al lato DC, e l'ordinata PM tali, che il loro 217
prodotto sia un massimo. Fatto $BD=4a$, $CD=b$, $PB=x$, sarà $4a:b::x:AP=\frac{bx}{4a}$, $PM=\sqrt{(4ax-x^2)}$ ed $AP.PM=\frac{bx}{4a}\sqrt{(4ax-x^2)}$ y.
Perciò $\frac{dy}{dx}=\frac{bx(3a-x)}{2a\sqrt{(4ax-x^2)}}=0=3a-x$, ed $x=3a$, che è un massimo, perchè $\frac{ddy}{dx^2}=-1$.

IV. Di tutti i triangoli della stessa base $AB=a$ e dello stesso 218
perimetro $2q$, qual è quello della massima superficie y? Sia $AM=x$, onde $MB=2q-a-x$. Dunque (580. VI.) $y=\sqrt{(q(q-a)\times(q-x)(a+x-q))}$, $2ly=lq+l(q-a)+l(q-x)+l(a+x-q)$, $\frac{2dy}{y}=\frac{-dx}{q-x}+\frac{dx}{a+x-q}$, $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{2}\left(\frac{1}{a+x-q}-\frac{1}{q-x}\right)=0$, ed $a+x-q=q-x$, $2q-a-x=x$, e perciò il triangolo cercato è isoscele.

1015. Ma quantunque nel caso di y massimo o minimo sia $dy=0$, non sempre però si ha per y un massimo o un minimo da quest' equazione; e ciò può succedere tutte le volte che abbiasi ad un tempo stesso $dy=ddy=0$, oppure $dy=ddy=d^3y=d^4y=0$, e in generale $dy=ddy=d^3y=$ ec.... $=d^{2n}y=0$. È infatti visibile che il primo dei termini, il quale in ciascuno di questi casi resta dopo y nelle due espressioni di y', $'y$ é positivo nell' una, negativo nell' altra, per il che l' una di queste é maggiore, l' altra minore di y, come allorché $\frac{dy}{dx}$ non é nullo. Potremo quindi di concludere in generale che *se i differenziali* d^2y, d^3y, *ec.*, *i quali si annullano con* dy, *saranno in numero impari*, *l' equazione* $dy=0$ *non darà per* y *nè un massimo, nè un minimo; diversamente avremo un massimo se il primo che non si annulla é negativo, un minimo se è positivo*. Ecco un esempio.

1016. Si domanda in quali casi la funzione $y=x^5-5x^4+$

$5x^3+1$ sia un massimo o un minimo. Avremo $\frac{dy}{dx}=5x^4-20x^3+15x^2$, $\frac{d^2y}{dx^2}=20x^3-60x^2+30x$, $\frac{d^3y}{dx^3}=60x^2-120x+30$, $\frac{d^4y}{dx^4}=120x-120$. A $\frac{dy}{dx}=0$ soddisfanno $x=0$, $x=1$, $x=3$, il primo dei quali valori soddisfà ancora a $\frac{d^2y}{dx^2}=0$, ma non a $\frac{d^3y}{dx^3}=0$, onde non dà nè massimo né minimo; il secondo ci dà un massimo, perché da esso si ha $\frac{d^2y}{dx^2}=-10$; e il terzo un minimo, perché se ne deduce $\frac{d^2y}{dx^2}=90$.

1017. Frattanto allorchè il metodo non darà nè massimo, né minimo, o darà l' uno e non l' altro, dovrà manifestamente supporsi, che y non abbia limite alcuno finito di diminuzione o di accrescimento; ma che in uno o più punti si annulli, se avremo avuto il massimo e non il minimo, che tenda a divenire infinita, se avremo avuto il minimo e non il massimo; e passi dall' uno all' altro estremo, se mancheranno insieme il massimo e il minimo. Allora ponendo $\phi(x)=0$ nel primo caso, $\phi(x)=\infty$ nel secondo, e l' una e l' altra equazione nel terzo, dovranno aversi per x uno o più valori reali, che non solo renderanno y nulla o infinita, ma nelle curve determineranno i punti dell' asse, ove l' ordinata ha l' uno o l' altro valore, e completeranno così la soluzione del problema.

Es. Si domanda il massimo e minimo valore dell' ordinata nel circolo. Avremo $y=\sqrt{(2ax-x^2)}$, $\frac{dy}{dx}=\frac{a-x}{\sqrt{(2ax-x^2)}}=0=a-x$, e per il massimo $x=a$. In luogo del minimo faremo $y=0$, il che dà $x=0$, $x=2a$, che sono in fatti i due punti, ove la curva tocca l' asse, e l' ordinata é perciò nulla.

Talvolta anche da $dy=0$ si hanno i valori di x corrispondenti ad y nullo, come allorchè y e dy scemando insieme giungono in un tempo stesso allo zero. Così nella Cissoide (805) abbiamo $y=\sqrt{\frac{x^3}{a-x}}$, e $\frac{dy}{dx}=\frac{3a-2x}{2(a-x)}\sqrt{\frac{x}{a-x}}$, che eguagliato a

zero darebbe $3a-2x=0$, $x=0$; la seconda delle quali equazioni rende y nullo. Quanto alla prima si ha $x=\frac{3a}{2}$ ed $y=\frac{3a}{2}\sqrt{-3}$ immaginario. Dunque in luogo del massimo porremo $y=\infty$, al che corrispunde $x=a$.

1018. Per trovare ora in quali casi una funzione z di due variabili x, y indipendenti tra loro, divenga un massimo o un minimo, supponiamo che y abbia già il valor proprio a render la funzione z un massimo o un minimo; si tratterà dunque di trovare il valor conveniente di x, cioè bisognerà differenziare la funzione z parzialmente per x, ed eguagliare a zero il coefficiente di dx. Così per aver y si differenzierà la funzione z, facendo variare y sola, ed eguagliando il coefficiente di dy a zero. Onde poichè $dz=\left(\frac{dz}{dx}\right)dx+\left(\frac{dz}{dy}\right)dy$ (942) saranno $\left(\frac{dx}{dy}\right)=0$, $\left(\frac{dz}{dy}\right)=0$ le due equazioni che daranno i valori di x e di y proprj a render la funzione z un massimo o un minimo. Per distinguere l' uno dall' altro, sieno $'z=\varphi(x-\delta x, y-\delta y)$, $z'=\varphi(x+\delta x, y+\delta y)$ due valori di z, l' unu immediatamente minore, l' altro immediatamente maggiore di quello che si suppone massimo o minimo, e per il quale si ha $\left(\frac{dz}{dx}\right)=0$, $\left(\frac{dz}{dy}\right)=0$. Sarà (972) $z'=z+\frac{\delta x^2}{2}\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)+\delta x\delta y\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)+\frac{\delta y^2}{2}\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)+$ ec.; ossia, fatto $\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)=A$, $\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)=B$, $\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)=C$, $A\delta x^2+2B\delta x\delta y+C\delta y^2=2F=A\left(\delta x+\frac{B\delta y}{A}\right)^2+\delta y^2\left(C-\frac{B^2}{A}\right)$, $z'=z+F+$ec. Nel modo stesso troveremo $'z=z+F-$ec., e ripetuto il solito ragionamento (969) concluderemo che z sarà massima o minima, secondo che F sarà negativa o positiva, cioè secondo che lo saranno A, C e $C-\frac{B^2}{A}$. Dunque le condizioni per il massimo sono $A<0$, $C<0$, $C-\frac{B^2}{A}<0$; e per il minimo $A>0$, $C>0$, $C-\frac{B^2}{A}>0$. Questa teoria facilmente si estende al caso di più variabili.

Esempj. I. Si voglia dividere il numero dato $3a$ in tre parti x, y, $3a-x-y$, il cui prodotto z sia un *massimo*. Avremo $z=xy(3a-x-y)$, $\left(\frac{dz}{dx}\right)=(3a-2x-y)y$, $\left(\frac{dz}{dy}\right)=(3a-2y-x)x$. Eguagliando a zero separatamente questi coefficienti, si avrà $3a-2x-y=0=3a-2y-x$, onde $y=x=a$; e poichè $A=\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)=-2y$, $B=\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)=3a-2x-2y$, $C=\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)=-2x$, cioè posti i valori di x ed y, $A=-2a$, $B=-a$, $C=-2a$, dunque $A<0$, $C<0$, e $C-\frac{B^2}{A}\left(=-\frac{3a}{2}\right)<0$, e perciò dividendo il dato numero in tre parti eguali, il loro prodotto darà un massimo.

II. Tra i triangoli isoperimetri vogliasi quello che ha la maggior superficie). Sia $2q$ il perimetro x, y, $2q-x-y$ i lati; avremo $Y=\sqrt{(q(q-x)(q-y)(x+y-q))}$ (580. VI.); dunque $2lY-lq=l(q-x)+l(q-y)+l(x+y-q)$, e $dY=\frac{Ydx}{2}\left(\frac{1}{x+y-q}-\frac{1}{q-x}\right)+\frac{Ydy}{2}\left(\frac{1}{x+y-q}-\frac{1}{q-y}\right)$. Eguagliando a zero i coefficienti di dy, dx, si ha $x+y-q=q-y=q-x$; onde $x=y=\frac{2q}{3}=2q-x-y$, e il triangolo è l' equilatero.

III. Trovar l' equazioni di una retta che da un punto dato scenda normalmente sopra di un piano dato.

Sia $z=Ax+By+C$ l' equazione del piano (854); x', y', z' le coordinate del punto dato. Sarà $r=\sqrt{((x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2)}$ la distanza di questo ad un punto qualunque del piano (730), o l' espressione di una retta condotta comunque dal punto dato al piano, espressione che dovrà per conseguenza essere un minimo, quando la retta debba esser normale. In tal caso, poiché l' equazione del piano rende z funzione implicita di x, y (955), i coefficienti di dx e di dy in dr saranno $\left(\frac{dr}{dz}\right)\left(\frac{dz}{dx}\right)+\left(\frac{dr}{dx}\right)$, $\left(\frac{dr}{dz}\right)\left(\frac{dz}{dy}\right)+\left(\frac{dr}{dy}\right)$; poichè dunque $r\left(\frac{dr}{dz}\right)=z-z'$, $r\left(\frac{dr}{dx}\right)=x-x'$, $r\left(\frac{dr}{dy}\right)=y-y'$ e l' equazione del piano dà

$\left(\frac{dz}{dx}\right)=A$, $\left(\frac{dz}{dy}\right)=B$, perciò sostituendo e mandando a zero, avremo per le due equazioni della retta cercata (856) $x=x'-A(z-z')$, $y=y'-B(z-z')$, come già trovammo per altra via (860. VII.).

1019. Serve questo stesso metodo a determinare ancora i 219
punti d' inflessione (736); poichè nei due triangoli infinitesimi $mm'r$, $m'or'$ d' una stessa base dx, l' angolo $mm'r(=mtP)<m'or'(=m't'P)$, onde anche $mr<m'r'$, cioé la differenza dy dell' ordinata che da A scorre in PM, e da PM o procede avanti o torna indietro, scema sempre nella concavità della curva; e potrebbe dimostrarsi nel modo stesso che sempre cresce nella sua convessità. Dunque nel punto M d' inflessione la differenza dy diviene un minimo o un massimo; perciò applicando a dy ciò che abbiamo dimostrato nel caso stesso per y, concluderemo che *si potrà aver l' inflessione ponendo* $ddy=0$, *purchè non sieno zero in numero pari i successivi differenziali* d^3y, d^4y, ec., *nel qual caso si porrà immediatamente* $dy=0$, *oppure* $dy=\infty$.

Esemp. I. Sia la prima parabola cubica in cui $y^3=a^2x$; si avrà $dy=\frac{dx}{3}\sqrt[3]{\frac{a^2}{x^2}}$, $-\frac{ddy}{dx^2}=\frac{2}{9x}\sqrt[3]{\frac{a^2}{x^2}}=0$, che niente significa; ma posto $dy=\infty$, si ha $x=0$.

II. Sia la concoide in cui $y=\frac{b+x}{x}\sqrt{(a^2-x^2)}$ (802); si avrà $dy=\frac{-dx(a^2b+x^3)}{x^2\sqrt{(a^2-x^2)}}$, $\frac{-ddy}{dx^2}=\frac{a^2x^3+3a^2bx^2-2a^4b}{(a^2x^3-x^5)\sqrt{(a^2-x^2)}}=0$, onde $x^3+3bx^2-2a^2b=0$, equazione che risoluta dà per x il valor conveniente al punto d' inflessione.

III. Sia la curva dell' equazione $y-a=(x-a)^{\frac{3}{5}}$; si avrà $dy=\frac{3dx}{5\sqrt[5]{(x-a)^2}}$, $\frac{-ddy}{dx^2}=\frac{6}{25(x-a)^{\frac{7}{5}}}$, che eguagliato a zero, nulla fa conoscere; ma fatto $dy=\infty$ si ha $x=a=y$, valori corrispondenti al punto d' inflessione.

Altre regole del Calcolo Integrale

Metodo per ridurre l'integrazione di più differenziali binomj di una sola variabile a quella di altri differenziali conosciuti.

1020. Debbasi integrare $x^n dx(a+bx^m)^k$, supponendo nota l'integrale di $x^p dx(a+bx^m)^k$, ed $n>p$. Poichè $x^n = x^{n-m+1} \times x^{m-1}$, fatto $x^{n-m+1}=t$, ed $x^{m-1}dx(a+bx^m)^k=dq$, onde (949) $q=\frac{(a+bx^m)^{k+1}}{bm(k+1)}=\frac{a(a+bx^m)^k+bx^m(a+bx^m)^k}{bm(k+1)}$, la formula $\int t\,dq = tq - \int q\,dt$ (952) dà $\int x^n dx(a+bx^m)^k = \frac{x^{n+1-m}(a+bx^m)^{k+1}}{bm(k+1)} - \frac{1+n-m}{bm(k+1)}\int x^{n-m}dx(a(a+bx^m)^k + bx^m(a+bx^m)^k)$, cioè riducendo, $\int x^n dx(a+bx^m)^k = \frac{x^{1+n-m}(a+bx^m)^{k+1}}{b(mk+n+1)} - \frac{a(n-m+1)}{b(mk+n+1)}\int x^{n-m}dx(a+bx^m)^k$.

Se in questa istessa espressione in vece di n si scriva $n-m$, $n-2m$, ec., si avranno i valori di $\int x^{n-m}dx(a+bx^m)^k$, di $\int x^{n-2m}dx(a+bx^m)^k$, in generale di $\int x^{n-im}dx(a+bx^m)^k$, essendo i un intero positivo; e la formula sarà $\int x^n dx(a+bx^m)^k =$

$$(a+bx^m)^{k+1}\left(\frac{x^{1+n-m}}{b(1+n+mk)} - \frac{a(1+n-m)(A)}{bx^m(1+n+m(k-1))} - \frac{a(1+n-2m)(B)}{bx^m(1+n+m(k-2))} - \ldots - \frac{a(1+n-m(i-1))(Z)}{bx^m(1+n+m(k-i+1))}\right) \pm \frac{a^i(1+n-m)(1+n-2m)\ldots\ldots(1+n-im)}{b^i(1+n+mk)(1+n+m(k-1))\ldots\ldots(1+n+m(k-i+1))} \times$$

$\int x^{n-im}dx(a+bx^m)^k$, ove le lettere (A), (B), ... (Z) indicano che il termine in cui sono dee moltiplicarsi per il precedente, ed il segno superiore ha luogo quando i è pari, l'inferiore quan-

do è impari. Ora se $n - im = p$, cioè se $\frac{n-p}{m} = i$, potrà $\int x^n dx(a+bx^m)^k$ ridursi con la formula precedente a $\int x^p \times dx(a+bx^m)^k$, presi tanti termini della serie e tanti fattori nel numeratore e denominator del termine fuor di serie, quante sono unità in i.

Esempio. Sia $\int x^{10}dx(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ da ridursi a $\int d\,(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = arc.sen\,x$ (931. 1.°): sarà $n=10$, $a=1$, $b=-1$, $m=2$, $k=-\frac{1}{2}$, $p=0$, $\frac{n-p}{m}=i=5$; dunque $\int x^{10}dx(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = (1-x^2)^{\frac{1}{2}} \times \left(-\frac{1}{10}x^9 - \frac{9}{10.8}x^7 - \frac{9.7}{10.8.6}x^5 - \frac{9.7.5}{10.8.6.4}x^3 - \frac{9.7.5.3}{10.8.6.4.2}x\right) + \frac{9.7.5.3.1}{10.8.6.4.2} arc.sen\,x + C$.

In generale $\int \frac{x^{2r}dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = C - \sqrt{(1-x^2)}\left(\frac{1}{2r}x^{2r-1} + \frac{2r-1}{2r(2r-2)}x^{2r-3} + \text{ec.} + \frac{(2r-1)(2r-3)\ldots\ldots 3.1}{2r(2r-2)\ldots\ldots 4.2}x\right) + \frac{(2r-1)(2r-3)\ldots\ldots 3.1}{2r(2r-2)\ldots\ldots 4.2} arc.sen\,x$, e $\int \frac{x^{2r+1}dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = C' - \sqrt{(1-x^2)}\left(\frac{1}{2r+1}.x^{2r} + \frac{2r}{(2r+1)(2r-1)}.x^{2r-2} + \text{ec.}\ldots\ldots + \frac{2r(2r-2)\ldots\ldots 4.2}{(2r+1)(2r-1)\ldots\ldots 3.1}\right)$.

1021. Se i sia numero intero negativo, in luogo di ridurre $\int x^n dx(a+bx^m)^k$ a $\int x^p dx(a+bx^m)^k$, si ridurrà questa alla prima.

Esempio. Sia $\int x^{-4}dx(1+x^2)^{-1}$ da ridursi a $\int dx(1+x^2)^{-1} = arc.tang\,x$ (931. 5.°); si avrebbe $n=-4$, $m=2$, $p=0$, ed $\frac{n-p}{m} = -2$, riducendo dunque la seconda alla prima si avrà $n=0$, $a=1$, $b=1$, $m=2$, $k=-1$, $p=-4$, $\frac{n-p}{m} = 2 = i$; onde

$\int dx(1+x^2)^{-1} = -x^{-1} + \frac{x^{-3}}{5} + \int x^{-4}dx(1+x^2)^{-1}$; dunque

$\int x^{-4}dx(1+x^2)^{-1} = x^{-1} - \frac{x^{-3}}{5} + \int dx(1+x^2)^{-1}$.

1022. Sia proposto ora di ridurre $\int x^n dx(a+bx^m)^p$ a $\int x^r dx(a+bx^m)^q$. Fatto $x^{n+1}=z$, ed $(a+bx^m)^p=u$, la formula $\int udz = uz - \int zdu$ (952) dà $\int x^n dx(a+bx^m)^p = \frac{x^{n+1}(a+bx^m)^p}{n+1} - \frac{bmp}{n+1}\int x^{m+n}dx(a+bx^m)^{p-1}$. Se in questa istessa espressione si scriva $n+m$, $n+2m$ ec. per n; $p-1$, $p-2$, ec. per p, si avranno i valori di $\int x^{n+m}dx(a+bx^m)^{p-1}$, di $\int x^{n+2m}dx(a+bx^m)^{p-2}$ ec., e si troverà la seguente formula: $\int x^n dx(a+bx^m)^p = (a+bx^m)^p \times \left(\frac{x^{n+1}}{1+n} - \frac{bmpx^m(A)}{(1+n+m)(a+bx^m)} - \frac{bm(p-1)x^m(B)}{(1+n+2m)(a+bx^m)} - \dots\dots - \frac{bm(p-i'+2)x^m(Z)}{(1+n+m(i'-1))(a+bx^m)}\right) \pm \frac{b^{i'}m^{i'}p(p-1)\dots(p-i'+1)}{(1+n)(1+n+m)\dots(1+n+m(i'-1))} \times \int x^{n+i'm}dx(a+bx^m)^{p-i'}$. ove tutto si prende come prima (1020). Ora se $p-i'=q$, o se $p-q=i'$, intero positivo, l' integrale di $x^n dx(a+bx^m)^p$ si ridurrà a $\int x^{n+i'm}dx(a+bx^m)^q$, il quale potendo ridursi a $\int x^r dx(a+bx^m)^q$ quando $n+i'm-im=r$, cioè quando $\frac{n-r}{m}=i-i'$, vi si potrà ridurre anche il dato.

Esempio. Sia da ridursi $\int x^4dx(1-x^2)^{\frac{5}{2}}$ a $\int dx(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$; si avrà $n=4$, $a=1$, $b=-1$, $m=2$, $p=\frac{5}{2}$, $r=0$, $q=\frac{1}{2}$, $p-q=i'=2$.

Dunque $\int x^4dx(1-x^2)^{\frac{5}{2}} = \frac{x^5(1-x^2)^{\frac{5}{2}}}{5} + \frac{5x^7(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}{5.7} +$

$\frac{5.5}{5.7}\int x^8dx(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$; ma (1020) $\int x^8dx\,(1-x^2)^{\frac{1}{2}}=(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\times\left(-\frac{x^7}{10}-\frac{7x^5}{10.8}-\frac{7.5x^3}{10.8.6}-\frac{7.5.3x}{10.8.6.4}\right)+\frac{7.5.3.1}{10.8.6.4}\int dx(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$; dunque $\int x^4dx(1-x^2)^{\frac{5}{2}}=\frac{x^5(1-x^2)^{\frac{5}{2}}}{5}+(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{x^7}{10}-\frac{3x^5}{10.8}-\frac{3.5x^3}{10.8.6}-\frac{3.5.3x}{10.8.6.4}\right)+\frac{3.5.3}{10.8.6.4}\int dx(1-x^2)^{\frac{1}{2}}+C$.

Così $\int x^{r-1}dx(a+bx^s)^{\frac{t}{u}\pm 1}$ e $\int x^{r\pm s-1}dx(a+bx^s)^{\frac{t}{u}\mp 1}$ si riducono a $\int x^{r-1}dx(a+bx^s)^{\frac{t}{u}}$.

1023. Se t' sia numero intero negativo si operi come sopra (1021).

Integrazione dei Rotti differenziali razionali.

1024. Suppongo $\frac{Pdx}{Q}$ un rotto razionale, ed il maggiore esponente di x in P almeno di un' unità minore che in Q, condizione che può sempre ottenersi con la divisione: così $\frac{x^4dx}{a+bx^3}=\frac{xdx}{b}-\frac{axdx}{b(a+bx^3)}$, la cui seconda parte è quale l' abbiamo supposta per $\frac{Pdx}{Q}$. Ora 1.° sia $Q=(x-f)(x-g)(x-k)$ ec., prodotto di più fattori di primo grado reali ed ineguali. Faccio $\frac{Pdx}{Q}=\frac{Adx}{x-f}+\frac{Bdx}{x-g}+\frac{Ddx}{x-k}+$ec., e per determinare i coefficienti pongo $(x-g)(x-k)$ ec. $=S$, $\frac{B}{x-g}+\frac{D}{x-k}+$ ec. $=\frac{R}{S}$, onde $\frac{P}{Q}=\frac{P}{(x-f)S}=\frac{A}{x-f}+\frac{R}{S}$. Dunque $R(x-f)=P-AS$, e se si faccia $x=f$, e sieno M, T ciò che allora divengono P, S; avremo $A=\frac{M}{T}$. Nel modo stesso fatte $S'=(x-f)(x-k)$ ec., $S''=$

$(x-f)(x-g)$ ec., e supposto che M', T', M'', T'' ec. sieno ciò che divengono P, S', P, S'', ec. allorchè vi si cangi x in g, in k ec.; avremo $B=\frac{M'}{T'}$, $D=\frac{M''}{T''}$, ec. Intanto poichè A, B, ec. non contengono x, sarà $\int\frac{A\,dr}{x-f}=Al(x-f)$ (948. 2°), $\int\frac{Bdx}{x-g}=Bl(x-g)$, ec.; e $\int\frac{Pdx}{Q}=Al(x-f)+Bl(x-g)+\text{ec.}+lC$.

Esempio. Si voglia integrare $dy=\frac{dx}{(a^2-x^2)x}$. Faccio $\frac{dx}{(a^2-x^2)x}=\frac{Adx}{x}+\frac{Bdx}{a-x}+\frac{Ddx}{a+x}$. Ho dunque $P=1$, $S=a^2-x^2$, $S'=x(a+x)$, $S''=x(a-x)$, e dovrò porre $x=0$ in P,S, $x=a$ in P,S', $x=-a$ in P,S''. Dunque $M=M'=M''=1$, $T=a^2$, $T'=2a^2$, $T''=-2a^2$, ed $A=\frac{M}{T}=\frac{1}{a^2}$, $B=\frac{M'}{T'}=\frac{1}{2a^2}$, $D=\frac{M''}{T''}=-\frac{1}{2a^2}$. Perciò $dy=\frac{dx}{a^2x}+\frac{dx}{2a^2(a-x)}-\frac{dx}{2a^2(a+x)}$; onde $y=\frac{lx}{a^2}-\frac{l(a-x)}{2a^2}-\frac{l(a+x)}{2a^2}+\frac{lC}{a^2}=\frac{1}{a^2}l\frac{xC}{\surd(a^2-x^2)}$. Si troverà pure $\int\frac{dx}{a^2-x^2}=\frac{1}{2a}l\frac{C(a+x)}{a-x}$.

2° Oltre i fattori ineguali $x-f$, $x-g$, ec. abbia Q un numero m di fattori reali eguali espressi da $(x-a)^m$. Pongo $\frac{Pdx}{Q}=\frac{Adx}{x-f}+\frac{Bdx}{x-g}+\text{ec.}+\frac{A'dx}{(x-a)^m}+\frac{A''dx}{(x-a)^{m-1}}+\text{ec.}..+\frac{A^{(m)}dx}{x-a}$ e determinati come sopra A, B, ec. faccio $(x-f)(x-g)$ ec. $=S$, $\frac{A}{x-f}+\frac{B}{x-g}+\text{ec.}=\frac{R}{S}$, e perciò $\frac{P}{Q}=\frac{P}{(x-a)^mS}=\frac{A'}{(x-a)^m}+\frac{A''}{(x-a)^{m-1}}+\text{ec.}+\frac{R}{S}$. Dunque $\frac{R}{S}(x-a)^m=\frac{P}{S}-A'-A''(x-a)-A'''(x-a)^2-$ ec., e se in quest' equazione e nei differenziali di essa fino all' ordine m^{simo} si faccia $x=a$, e si suppongano $\frac{M'}{T'}$, $\frac{M''}{T''}$, $\frac{M'''}{T'''}$, ec. ciò che divengono allora $\frac{P}{S}$, $d\left(\frac{P}{S}\right):dx$, $d^2\left(\frac{P}{S}\right):2dx^2$

ec., avremo $A'=\frac{M'}{T'}$, $A''=\frac{M''}{T''}$, $A'''=\frac{M'''}{T'''}$ ec., son dunque costanti A', A'', ec.; perciò $\int \frac{A'dx}{(x-a)^m} = A'\int dx\,(x-a)^{-m} =$ (949) $- \frac{A'}{(m-1)(x-a)^{m-1}}$; $\int \frac{A''dx}{(x-a)^{m-1}} = -\frac{A''}{(m-2)(x-a)^{m-2}}$ ec.; $\int \frac{A^{(m)}dx}{x-a} = A^{(m)}l(x-a)$, integrali, che uniti a quelli di $\frac{A\,dx}{x-f}$, $\frac{Bdx}{x-g}$, ec. daranno il valore cercato di y.

Esempio. Sia $dy = \frac{(x^3+x^2+2)dx}{x(x-1)^2(x+1)^2}$. Decompongo questa frazione in $\frac{Adx}{x} + \frac{A'dx}{(x-1)^2} + \frac{A''dx}{x-1} + \frac{B'dx}{(x+1)^2} + \frac{B''dx}{x+1}$; sarà intanto $P = x^3+x^2+2$, e per determinare A, fatto (1024. 1.°) $S=(x-1)^2(x+1)^2$ ed $x=0$ in P ed S, troveremo $M=2$, $T=1$ ed $A=2$. Per determinare A' ed A'', avremo $S=x(x+1)^2$, $\frac{P}{S} = \frac{x^3+x^2+2}{x(x+1)^2}$, $d\left(\frac{P}{S}\right) : dx = \frac{(x+1)(x^2-2)-4x}{x^2(x+1)^3}$, e poiché $a=1$, fatto $x=1$, si otterrà $\frac{M'}{T'} = 1 = A'$, $\frac{M''}{T''} = -\frac{3}{4} = A''$. Finalmente per B', B'' avremo $S = x(x-1)^2$, $\frac{P}{S} = \frac{x^3+x^2+2}{x(x-1)^2}$, $d\left(\frac{P}{S}\right) : dx = \frac{4-(3x+1)(x^2+2)}{x^2(x-1)^3}$, $a=-1$, onde posto $x=-1$, sarà $\frac{M'}{T'} = -\frac{1}{2} = B'$, $\frac{M''}{T''} = -\frac{5}{4} = B''$. Dunque $dy = \frac{2dx}{x} + \frac{dx}{(x-1)^2} - \frac{3dx}{4(x-1)} - \frac{dx}{2(x+1)^2} - \frac{5dx}{4(x+1)}$, ed $y = 2lx - \frac{1}{x-1} - \frac{3}{4}l(x-1) + \frac{1}{2(x+1)} - \frac{5}{4}l(x+1)$.

3.° Sieno in Q dei fattori immaginarj. Esprimendosi uno di essi con $x+a+b\sqrt{-1}$, ve ne sarà un altro della forma $x+a-b\sqrt{-1}$. Dunque il loro prodotto $x^2+2ax+b^2+a^2$, o per brevità x^2+mx+n, sarà un fattor reale di Q. Si faccia

$x = \frac{z-m}{2}$: allora x^2+mx+n diverrà $\frac{1}{4}(z^2-m^2+4n)$ o più brevemente $\frac{1}{4}(z^2+b^2)$; e supposto q il numero dei fattori di Q, p la massima dimensione di x in P, il dato $\frac{Pdx}{Q}$ si cangerà in $\frac{2^{q-p-1}P'dz}{Q'}$, e dovrà integrarsi $\frac{P'dz}{Q'}$. Perciò opereremo come sopra rapporto ai valori reali di Q', e quanto a z^2+b^2, supponendo che $\frac{Az+B}{z^2+b^2}$ ne sia il corrispondente rotto parziale, porremo $Q'=(z^2+b^2)S$, $\frac{P'}{Q'}=\frac{P'}{(z^2+b^2)S}=\frac{Az+B}{z^2+b^2}+\frac{R}{S}$, dal che si ha $\frac{R}{S}(z^2+b^2)=\frac{P'}{S}-Az-B$, e se fatto $z=\pm b\sqrt{-1}$ sieno $M\pm N\sqrt{-1}$, $T\pm U\sqrt{-1}$ i valori, che prendono P' ed S, avremo le due equazioni $\pm Ab\sqrt{-1}+B=\frac{M\pm N\sqrt{-1}}{T\pm U\sqrt{-1}}$, che sottratte e sommate danno $A=\frac{NT-MU}{b(T^2+U^2)}$, $B=\frac{MT+NU}{T^2+U^2}$; ove N, U dovranno considerarsi come positivi se il termine immaginario in P', S sarà preceduto dal segno $\pm$, come negativi se sarà preceduto dal $\mp$. Determinati A, B sarà $\int\frac{(Az+B)dz}{z^2+b^2}=A\int\frac{zdz}{z^2+b^2}+\frac{B}{b}\int\frac{dz}{b}\cdot\left(\frac{z^2}{b^2}+1\right)$-(948.2.° 931.3.°) $\frac{1}{2}Al(z^2+b^2)+\frac{B}{b}arc.tang\frac{z}{b}$.

Esempio. Sia $dy=\frac{dx}{x(1+x)^2(1+x+x^2)}$, ove il fattore $1+x+x^2$ è il prodotto dei due immaginarj $x+\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{-3}$. Poichè dunque $m=1$, porremo $x=\frac{z-1}{2}$, il che darà $dy=\frac{16dz}{(z-1)(z+1)^2(z^2+3)}$. Dovrà perciò integrarsi $\frac{dz}{(z-1)(z+1)^2(z^2+3)}$. Sarà dunque $P'=1$, e relativamente al fattore $z-1$ avremo $S=(z+1)^2(z^2+3)$, onde $\frac{P'}{S}=\frac{1}{(z+1)^2(z^2+3)}$, e fatto $z=1$, sarà

(1.°) $M=1$, $T=16$, $A=\frac{1}{16}$, e $\frac{dz}{16(z-1)}$ il rotto corrispondente. Per il fattore $(z+1)^2$ avremo $S=(z-1)(z^2+5)$, onde $\frac{P'}{S}=\frac{1}{(z-1)(z^2+3)}$, $d\left(\frac{P'}{S}\right):dz=\frac{-3z^2+2z-3}{(z-1)^2(z^2+3)^2}$, e fatto $z=-1$, avremo (2.°) $A'=-\frac{1}{8}=A''$, d' onde i due rotti $-\frac{dz}{8(z+1)^2}$, $-\frac{dz}{8(z+1)}$. Il fattore z^2+3 darà $S=(z-1)(z+1)^2$, che fatto $z=\pm\sqrt{3}\sqrt{-1}$, diverrà $-4\mp4\sqrt{3}\sqrt{-1}$. Dunque (3.°) $M=1$, $N=0$, $T=-4$, $U=-4\sqrt{3}$, ed $A=\frac{1}{16}=-B$, d' onde il rotto $\frac{(z-1)dz}{16(z^2+3)}$. Perciò $dy=\frac{dz}{z-1}-\frac{2dz}{(z+1)^2}-\frac{2dz}{z+1}+\frac{(z-1)dz}{z^2+3}$, ed integrando, $y=l\frac{(z-1)\sqrt{(z^2+3)}}{(z+1)^2}+\frac{2}{z+1}-\frac{1}{\sqrt{3}}arc.\,tang\frac{z}{\sqrt{3}}+C=l\frac{x\sqrt{(x^2+x+1)}}{(x+1)^2}+\frac{1}{x+1}-\frac{1}{\sqrt{3}}arc.\,tang\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C$.

4.° Infine abbia Q un numero m di fattori della forma x^2+mx+n eguali tra loro, $(x^2+mx+n)^m$ ne sarà il prodotto, che, cangiato come sopra x in $\frac{z-m}{2}$, darà luogo al fattore $(z^2+b^2)^m$ in Q'. Operando dunque nel modo già stabilito quanto ai rimanenti, dovrà per rapporto a quest' ultimo porsi $Q'=(z^2+b^2)^mS$, e $\frac{P'dz}{Q'}=\frac{P'dz}{(z^2+b^2)^mS}=\frac{(Az+B)dz}{(z^2+b^2)^m}+\frac{(A'z+B')dz}{(z^2+b^2)^{m-1}}+\frac{(A''z+B'')dz}{(z^2+b^2)^{m-2}}+$ ec. $+\frac{Rdz}{S}$ ed avremo $\frac{R}{S}(z^2+b^2)^m=\frac{P'}{S}-Az-B-(A'z+B')(z^2+b^2)-(A''z+B'')(z^2+b^2)^2-$ec. Ora se in questa equazione e nei suoi differenziali fino all' ordine m^{simo}, si faccia $z=+b\sqrt{-1}$, e si suppongano $\frac{M\pm N\sqrt{-1}}{T\pm U\sqrt{-1}}$, $\frac{M'\pm N'\sqrt{-1}}{T'\pm U'\sqrt{-1}}$, $\frac{M''\pm N''\sqrt{-1}}{T''\pm U''\sqrt{-1}}$, ec. i valori che prenderanno allora $\frac{P'}{S}$, $d\left(\frac{P'}{S}\right):dz$, $d^2\left(\frac{P'}{S}\right):2dz^2$, ec. avremo

$$\frac{M \pm N\sqrt{-1}}{T \pm U\sqrt{-1}} = B \pm Ab\sqrt{-1}$$

$$\frac{M' \pm N'\sqrt{-1}}{T' \pm U'\sqrt{-1}} = A \pm 2b\sqrt{-1}(B' \pm A'b\sqrt{-1})$$

$$\frac{M'' \pm N''\sqrt{-1}}{T'' \pm U''\sqrt{-1}} \cdot B' \pm 3A'b\sqrt{-1} - 2^2b^2(B'' \pm A''b\sqrt{-1}),$$ ec., e di qui

$$A = \frac{NT - MU}{b(T^2+U^2)} \qquad B = \frac{MT+NU}{T^2+U^2}$$

$$A' = -\frac{M'T'+N'U'}{2b^2(T'^2+U'^2)} + \frac{2A}{2^2b^2} \qquad B' = \frac{N'T'-M'U'}{2b(T'^2+U'^2)}$$

$$A'' = -\frac{N''T''-M''U''}{2^2b^3(T''^2+U''^2)} + \frac{3A'}{2^2b^2} \qquad B'' = -\frac{M''T''+N''U''}{2^2b^2(T''^2+U''^2)} + \frac{B'}{2^2b^2}$$

ec.

Determinati così i coefficienti e venendo all' integrazione osserveremo, che i rotti parziali, in cui $\frac{P'dz}{Q'}$ si è decomposto, sôn generalmente delle due forme $A^{(r)}zdz\,(z^2+b^2)^{-n}$, $B^{(r)}dz(z^2+b^2)^{-n}$, e che perciò i primi sono integrabili in parte algebricamente (949), e in parte per logaritmi (948. 2.°); i secondi posson ridursi a $\frac{dz}{z^2+b^2}$ (1020. 1022); cioé possono integrarsi in parte algebricamente, e in parte per archi di circolo: dunque con questi mezzi si avrà l' integrale del dato rotto.

Es. Sia $dy = \frac{(x+2)dx}{x^2(x-1)(x^2+x+1)^4}$. Posto $x = \frac{z-1}{2}$, avremo $dy = \frac{512(z+3)dz}{(z-3)(z-1)^2(z^2+3)^4}$, e dovrà integrarsi il rotto $\frac{(z+3)dz}{(z-3)(z-1)^2(z^2+3)^4}$. Applicati i metodi dell' articolo 1.° e 2.° di questo numero per i fattori $z-3$, $(z-1)^2$, si avranno i tre rotti $\frac{dz}{27.512(z-3)}$, $-\frac{4dz}{512(z-1)^2}$, $\frac{5dz}{512(z-1)}$. Per il fattore

$(z^2+3)^4$, verrà $\frac{P'}{S}=\frac{z+3}{(z-3)(z-1)^2}$, $d\left(\frac{P'}{S}\right):dz=\frac{-2z^2-6z+24}{(z-3)^2(z-1)^3}$, $d^2\left(\frac{P'}{S}\right):2dz^2=\frac{3z^3+9z^2-87z+123}{(z-3)^3(z-1)^4}$, $d^3\left(\frac{P'}{S}\right):2.3dz^3=\frac{-4z^4-12z^3+204z^2-588z+528}{(z-3)^4(z-1)^5}$; e quindi posto $z=\pm\sqrt{3}\sqrt{-1}$, $M=3$, $M'=5$, $M''=1$, $M'''=5$; $N=\sqrt{3}$, $N'=-\sqrt{3}$, $N''=-\sqrt{3}$, $N'''=23\sqrt{3}$; $T=12$, $T'=8$, $T''=-6$, $T'''=96$; $U=4\sqrt{3}$, $U'=-8\sqrt{3}$, $U''=-2\sqrt{3}$, $U'''=-96\sqrt{3}$; d' onde, per essere $b=\sqrt{3}$, $A=0$, $A'=-\frac{1}{3.8}$, $A''=-\frac{7}{3.96}$, $A'''=-\frac{17}{3.576}$; $B=\frac{1}{4}$, $B'=\frac{1}{2.8}$, $B''=\frac{1}{2.96}$, $B'''=-\frac{5}{4.576}$. Dunque $dy=512\left(\frac{dz}{27.512(z-3)}-\frac{4dz}{512(z-1)^2}+\frac{5dz}{512(z-1)}+\frac{dz}{4(z^2+3)^4}-\frac{(2z-3)dz}{48(z^2+3)^3}-\frac{(14z-3)dz}{576(z^2+3)^2}-\frac{(68z+15)dz}{6912(z^2+3)}\right)$, ed $y=\frac{58}{27\sqrt{3}}arc.\,tang\frac{z}{\sqrt{3}}+\frac{1}{27}l(z-3)+5l(z-1)-\frac{68}{27}l(z^2+3)+\frac{4}{z-1}+\frac{8z(5z^4+40z^2+99)}{27(z^2+3)^3}+\frac{4(z^3+5z+4)}{3(z^2+3)^2}+\frac{4(z+14)}{9(z^2+3)}=\frac{58}{27\sqrt{3}}arc.\,tang\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{27}l2(x-1)+5l2x-\frac{68}{27}l4(x^2+x+1)+\frac{2}{x}+\frac{(2x+1)(5(2x+1)^4+40(2x+1)^2+99)}{216(x^2+x+1)^3}+\frac{(2x+1)^3+5(2x+1)+4}{3.4(x^2+x+1)^2}+\frac{2x+15}{9(x^2+x+1)}$.

Dunque ogni differenziale frazionario e razionale s' integra o algebricamente o per logaritmi o per archi di circolo. La difficoltà consiste nel trovare i fattori di Q, difetto piuttosto dell' Algebra, che del metodo d' integrazione. Notiamo alcuni casi, in cui un rotto radicale può rendersi razionale.

1025. Sia $dy=\frac{(\sqrt[3]{x}+x\sqrt{x}+x^2)dx}{x+\sqrt[4]{x}}$: ridotti i radicali allo stesso grado (149), e fatto $\sqrt[12]{x}=z$, onde $x=z^{12}$, $dx=12z^{11}dz$, i radicali spariscono.

1026. Sia anche $dy = \frac{dx\sqrt{(1+x^4)}}{1-x^4}$. Posto $1+x^4=p^2x^2$, e di qui 1.° $x^2 = \frac{p^2+\sqrt{(p^4-4)}}{2}$, ed $x^2\sqrt{(p^4-4)} = \frac{p^2\sqrt{(p^4-4)}+p^4-4}{2}$; 2.° $1-x^4 = 2-p^2x^2 = \frac{4-p^4-p^2\sqrt{(p^4-4)}}{2} = -x^2\sqrt{(p^4-4)}$; 5.° $dx = \mp\frac{xpdp}{2x^2-p} = (1.°)\ \frac{xpdp}{\sqrt{(p^4-4)}}$; sarà $\frac{dx\sqrt{(1+x^4)}}{1-x^4} = \frac{-p^2dp}{p^4-4}$.

Sia parimente $dy = dx\sqrt{(\pm a^2 \mp x^2)}$, si faccia (268) $\pm a^2 \mp x^2 = Q = \frac{(x+a)(\pm a \mp x)}{(\pm a \mp x)^2} = \frac{x+a}{\pm a \mp x} = z^2$, onde $x = \frac{\mp a + az^2}{z^2 \pm 1}$, $dx = \frac{\pm 4azdz}{(z^2 \pm 1)^2}$ e $\sqrt{(\pm a^2 \mp x^2)} = \frac{2az}{z^2 \pm 1}$; dunque $dy = \frac{\pm 8a^2z^2dz}{(z^2 \pm 1)^3}$. La formula col segno + s' integra, come si è detto (1020. 1022), e sostituito il valor di z, si trova $\int dx\sqrt{(a^2-x^2)} = \frac{1}{2}x\sqrt{(a^2-x^2)} + a^2 arc.tang \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} + C$. La formula col segno — si integra al solito (1024.2.°), e sostituito il valor di z (osservando che $\frac{z+1}{z-1} = \frac{(z+1)^2}{z^2-1} = \frac{x+\sqrt{(x^2-a^2)}}{a}$), si ha $\int dx\sqrt{(x^2-a^2)} = \frac{x\sqrt{(x^2-a^2)}}{2} - \frac{a^2}{2} l\frac{x+\sqrt{(x^2-a^2)}}{a} + C$.

Se $dy = \frac{dx}{(a+bx)\sqrt{(1-x^2)}}$; fatto $z^2 = \frac{1-x}{1+x}$, si troverà $dy = -\frac{2dz}{a+b+(a-b)z^2}$. Dunque nel caso di $a>b$, divisi i due termini del rotto per $a-b$, sarà (1024. 3.°) $y = -\frac{2}{\sqrt{(a^2-b^2)}} arc.tang\, z \times \sqrt{\frac{a-b}{a+b}} = -\frac{2}{\sqrt{(a^2-b^3)}} arc.tang \sqrt{\frac{(1-x)(a-b)}{(1+x)(a+b)}}$, o ancora $y = -\frac{1}{\sqrt{(a^2-b^2)}} arc.tang \frac{2z\sqrt{(a^2-b^2)}}{a+b-z^2(a-b)} = -\frac{1}{\sqrt{(a^2-b^2)}} arc.tang \times \frac{2\sqrt{(1-x^2)(a^2-b^2)}}{(a+b)(1+x)-(a-b)(1-x)}$; giacché, posto $2 arc\ tang\, z\sqrt{\frac{a-b}{a+b}} =$

2ω, si ha $tang\, 2\omega = (641.\ 40.^a) \frac{2\, tang\, \omega}{1 - tang^2 \omega} = \frac{2z\sqrt{(a^2 - b^2)}}{a + b - z^2(a - b)}$, $2\omega =$ $arc.\ tang \frac{2z\sqrt{(a^2 - b^2)}}{a + b - z^2(a - b)}$. Se poi $a < b$, fatta la divisione per $b - a$, avremo $y = -\frac{1}{\sqrt{(b^2 - a^2)}}\, l \frac{\sqrt{(b^2 - a^2)} + z(b - a)}{\sqrt{(b^2 - a^2)} - z(b - a)} = -\frac{1}{\sqrt{(b^2 - a^2)}} \times$ $l \frac{\sqrt{(b^2 - a^2)(1 + x)} + (b - a)\sqrt{(1 - x)}}{\sqrt{(b^2 - a^2)(1 + x)} - (b - a)\sqrt{(1 - x)}}$.

1027. Se i fattori del radicale sono immaginarj, come $dy = dx\sqrt{(x^2 + c^2)}^{\pm 1}$, pongo $x^2 + c^2 = Q$, e fatto nella nota formula (268. 3.°) $a = 1$, $A = u$, sarà $x = \frac{u^2 - c^2}{2u}$, $u = x + \sqrt{(x^2 + c^2)}$, $\sqrt{(x^2 + c^2)} = \frac{u^2 + c^2}{2u}$, $dx = \frac{du}{2u^2}(u^2 + c^2)$; onde $dy = u^{-1} du\, (u^2 + c^2)^{1 \pm 1} (2u)^{-1 \mp 1}$, cioé col segno di sopra, $dy = \frac{du(u^2 + c^2)^2}{4u^3} = \frac{udu}{4} + \frac{c^2 du}{2u} + \frac{c^4 du}{4u^3}$, ed $y = C + \frac{u^4 - c^4}{8u^2} + \frac{c^2}{2} lu$; ma $\frac{u^4 - c^4}{8u^2} = \left(\frac{u^2 - c^2}{4u}\right)\left(\frac{u^2 + c^2}{2u}\right) = \frac{x}{2}\sqrt{(x^2 + c^2)}$; dunque $y = C + \frac{x}{2}\sqrt{(x^2 + c^2)} + \frac{c^2}{2}\, l\, (\sqrt{(x^2 + c^2)} + x)$. Col segno di sotto, $dy = \frac{du}{u}$, ed $y = lC(\sqrt{(x^2 + c^2)} + x)$.

Metodi d' integrar per Serie.

1028. Quando un differenziale non ammette integrazione esatta, si ricorre alle approssimazioni, e le serie sono allora l' ultimo compenso. Infatti riducendo in serie una funzione X della variabile x, si ha una serie di termini monomj, i cui integrali riuniti danno un valore approssimato di $\int X dx$. Per esempio, $\frac{dx}{a + x} = \frac{dx}{a} - \frac{xdx}{a^2} + \frac{x^2 dx}{a^3} -$ ec. (379); dunque $\int \frac{dx}{a + x} = \frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3a^3} -$ ec. $+ C = (403)\ l(1 + \frac{x}{a}) + lC = l\frac{C}{a}(a + x) = l\, C\, (a + x)$.

Così si ha $dy=\frac{dx}{1+x^2}=dx-x^2dx+x^4dx-x^6dx+$ec. (379);

ed $y=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+$ec.$=arc.tang\,x$ (658. 86.° 931. 3.°).

Così $dy=\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}}=dx(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}=dx(1+\frac{x^2}{2}+\frac{1.3x^4}{2.4}+\frac{1.3.5x^6}{2.4.6}+$ ec.) (178); ed $y=x+\frac{1x^3}{2.3}+\frac{1.3x^5}{2.4.5}+\frac{1.3.5x^7}{2.4.6.7}+$ ec. $=$ *arc.sen* x (655. 80.°).

1029. Bastino questi esempj; ma il seguente *Metodo di integrar per parti* dà delle serie più convergenti.

La formula $Xx=\int Xdx+\int xdX$ dà $\int Xdx=Xx-\int xdX$. Sia $dX=X'dx$; dunque $\int xdX=\int X'xdx$; e fatto $xdx=dz$, onde $\frac{x^2}{2}=z$, sarà $\int X'dz=X'z-\int zdX'=\frac{1}{2}(X'x^2-\int x^2dX')$. Sia $dX'=X''dx$; dunque $\int x^2dX'=\int X''x^2dx$, e fatto $x^2dx=dz$, onde $\frac{x^3}{3}=z$, sarà $\int X''dz=X''z-\int zdX''=\frac{1}{3}(X''x^3-\int x^3dX'')$, ec. Sostituendo questi valori nella prima espressione si troverà $\int Xdx=Xx-\frac{x^2}{2}X'+\frac{x^3}{2.3}X''-\frac{x^4}{2.3.4}X'''+\frac{x^5}{2.3.4.5}X^{\text{v}}-$ec., ovvero supposta dx costante, onde $\frac{dX}{dx}=X'$, $\frac{ddX}{dx}=dX'$, $\frac{dX'}{dx}=X''=\frac{ddX}{dx^2}$ ec., si avrà $\int Xdx=Xx-\frac{x^2dX}{2.dx}+\frac{x^3ddX}{2.3dx^2}-\frac{x^4dddX}{2.3.4dx^3}+$ ec.

1030. Sia $X=m(a+x)^{m-1}$, onde $\frac{dX}{dx}=m(m-1)(a+x)^{m-2}$, $\frac{ddX}{dx^2}=m(m-1)(m-2)(a+x)^{m-3}$, ec. Dunque $\int Xdx=$ (949) $(a+x)^m=C+mx(a+x)^{m-1}-\frac{1}{2}m(m-1)x^2(a+x)^{m-2}+$ ec. Fatto $x=0$, verrà $C=a^m$, ed $(a+x)^m=a^m+mx(a+x)^{m-1}-\frac{1}{2}m(m-1)x^2(a+x)^{m-2}+$ ec.

1031. Sia $X=a^x la$, $\frac{dX}{dx}=a^x l^2 a$, $\frac{ddX}{dx^2}=a^x l^3 a$ ec., il che dà $\int X dx=$ (925. 3.°) $a^x=C+a^x xla(1-\frac{1}{2}xla+\frac{1}{2.3}x^2l^2a-\text{ec.})$. Sia $x=0$, si avrà $C=1$, ed $a^x=1+a^x xla(1-\frac{1}{2}xla+\text{ec.})$; dividendo per a^x, verrà $1=a^{-x}+xla(1-\frac{1}{2}xla+\text{ec})$. Dunque $a^{-x}=1-xla(1-\frac{1}{2}xla+\text{ ec.})$, e supposta x positiva, le sue potenze impari cangian segno, ed $a^x=1+xla+\frac{x^2l^2a}{2}+\text{ec.}$ (409).

Integrazione delle funzioni Differenziali Logaritmiche ed Esponenziali.

1032. Vogliasi $\int X dx l^n x$. Posto $lx=y$, e successivamente $X dx=dz$, $zdy=du$, $udy=dt$, $tdy=ds$, ec., l' integrazione per parti (1029) dà $\int X dx l^n x=y^n z-ny^{n-1}u+n(n-1)y^{n-2}\times t-n(n-1)(n-2)y^{n-3}s+\text{ec.}=l^n x\int X dx-nl^{n-1}x\int\frac{dx}{x}\int X dx+n(n-1)l^{n-2}x\int\frac{dx}{x}\int\frac{dx}{x}\int X dx-n(n-1)(n-2)l^{n-3}\times x\int\frac{dx}{x}\int\frac{dx}{x}\int\frac{dx}{x}\int X dx+\text{ec.}$ Così se $n=3$, $X=x^4$, verrà $\int X dx=\frac{x^5}{5}$, $\int\frac{dx}{x}\int X dx=\frac{x^5}{5^2}$, ec., e $\int x^4 dx l^3 x=\frac{x^5}{5}(l^3x-\frac{3l^2x}{5}+\frac{6lx}{5^2}-\frac{6}{5^3})+C.$

1033. Se n sia negativa, fatto $lx=y$, e successivamente $d(Xx)=X'dx$, $d(X'x)=X''dx$, ec., verrà $dx=xdy$, e con lo stesso metodo si avrà $\int\frac{X dx}{l^n x}=\int\frac{X x dy}{y^n}=-\frac{x}{(n-1)l^{n-1}x}(X+\frac{X'lx}{n-2}+\frac{X''l^2x}{(n-2)(n-3)}+\text{ ec.})+\frac{1}{(n-1)(n-2)\dots 2.1}\int\frac{X^{(n-1)}dx}{lx}$. Così se $n=3$ ed $X=2x(lx-1)$, si ha $X'=2x(2lx-1)$, $X''=8xlx$, e $\int\frac{2xdx(lx-1)}{l^3x}=\frac{-x}{2l^2x}(2xlx-2x+2xlx(2lx-1))+\frac{1}{2}\int\frac{8xdxlx}{lx}=\frac{x^2}{l^2x}+C.$

1034. Debba ora integrarsi $a^{mx}Xdx$. Posto $a^{mx}dx=dz$, onde $\frac{a^{mx}}{mla}=z$ (925. 3.°), e fatto successivamente $dX=X'dx$, $dX'=X''dx$, ec., verrà col metodo stesso, $\int a^{mx}Xdx=\frac{a^{mx}}{mla}(X-\frac{X'}{mla}+\frac{X''}{m^2l^2a}-.....\pm\frac{X^{(n)}}{m^n l^n a})$, ove il segno di sopra é per n pari, ed n è determinata da $X^n=Costante$. Così se $m=3$, ed $X=3x^2(xla+1)$, si ha $X'=3x(3xla+2)$, $X''=6(3xla+1)$, $X'''=18la=C$, onde $n=3$, e $\int 3a^{3x}x^2dx(xla+1)=\frac{a^{3x}}{3la}(3x^2(xla+1)-\frac{3x(3xla+2)}{3la}+\frac{6(3xla+1)}{9l^2a}-\frac{18la}{27l^3a})=a^{3x}x^3+C$.

1035. Dunque $\int e^{mx}Xdx=\frac{e^{mx}}{m}(X-\frac{X'}{m}+.....\pm\frac{X^{(n)}}{m^n})$. Così con $m=2$, ed $X=2(a-x)(a-x-1)$, verrà $X'=2(2x-2a+1)$, $X''=4=C$, onde $n=2$, e $\int 2e^{2x}(a-x)(a-x-1)dx=\frac{e^{2x}}{2}(2(a-x)(a-x-1)-2x+2a)=e^{2x}(a-x)^2+C$.

1036. Troveremo egualmente (1031) $\int\frac{a^x dr}{X}=\int\frac{dx}{X}+la\int\frac{xdx}{X}+\frac{1}{2}l^2a\int\frac{x^2dx}{X}+$ec. Onde $\int\frac{e^x dx}{x}=C+lx+x+\frac{x^2}{4}+$ec.; e se $e^x=z$, si avrà $\int\frac{dz}{lz}=C+llz+lz+\frac{l^2z}{2.2}+\frac{l^3z}{3.2.3}+$ec.; e poichè $\int\frac{dz}{zlz}=llz(924)=y$, sarà $\int\frac{dz}{lz}=\int z.\frac{dz}{zlz}=\int zdy=zy-\int ydz=zllz-\int llzdz$, e $\int llzdz=zllz-\int\frac{dz}{lz}=zllz-C-llz-lz-$ ec.

Integrazione delle funzioni differenziali, ove entrano Seni, Coseni, ec.

1037. Poiché (926) $\int dx \cos x = \text{sen}\, x$, e $\int dx\, \text{sen}\, x = -\cos x$, sarà $\int dy \cos ny = \frac{\text{sen}\, ny}{n}$, e $\int dy\, \text{sen}\, ny = -\frac{\cos ny}{n}$, $\int dz \cos z\, \text{sen}^n z = \frac{\text{sen}^{n+1} z}{n+1}$, e $\int dz\, \text{sen}\, z \cos^n z = -\frac{\cos^{n+1} z}{n+1}$. Similmente $\int dy\, \text{sen}\, y \cos ay = (646) \frac{1}{2}\int dy\, \text{sen}(a+1)y - \frac{1}{2}\int dy\, \text{sen}(a-1)y = -\frac{\cos(a+1)y}{2(a+1)} + \frac{\cos(a-1)y}{2(a-1)}$. Sarebbe lo stesso per $dx\, \text{sen}\, x\, \text{sen}\, ax$, $dx \cos x \cos ax$, ec., e si tratterebbe colla stessa facilità $dx\, \text{sen}\, x\, \text{sen}\, ax \cos bx$, ec., riducendo questi prodotti a seni o coseni semplici.

1038. Vogliasi $\int dx\, \text{sen}^n x$. Fatto $\text{sen}\, x = y$, onde $dx = dy \times (1-y^2)^{-\frac{1}{2}}$, riduco (1020) $\int dx\, \text{sen}^n x = \int y^n dy (1-y^2)^{-\frac{1}{2}}$ o a $\int dy (1-y^2)^{-\frac{1}{2}} = \text{arc.sen}\, y = x$ se n é pari, o a $\int y dy (1-y^2)^{-\frac{1}{2}} = -\cos x$ se n é impari, e restituiti quindi i valori, ho $\int dx\, \text{sen}^n x = C - \frac{\cos x}{n}\left(\text{sen}^{n-1} x + \frac{n-1}{n-2} \text{sen}^{n-3} x + \frac{(n-1)(n-3)}{(n-2)(n-4)} \text{sen}^{n-5} x + \text{ec.}\right) + \frac{(n-1)(n-3)\ldots 1}{n(n-2)\ldots 2} x$ (presi $\frac{n}{2}$ termini) se n è pari, e $-\frac{(n-1)(n-3)\ldots 2}{n(n-2)\ldots 1} \cos x$ (presi $\frac{n-1}{2}$ termini) se n é impari.

Così $\int dx\, \text{sen}^6 x = C - \frac{\cos x}{6}\left(\text{sen}^5 x + \frac{5}{4} \text{sen}^3 x + \frac{5.3}{4.2} \text{sen}\, x\right) + \frac{5.3.1}{6.4.2} x$; e $\int dx\, \text{sen}^5 x = C - \frac{\cos x}{5}\left(\text{sen}^4 x + \frac{4\, \text{sen}^2 x}{3} + \frac{4.2}{3.1}\right)$. Facendo $x = 90 - y$, e per conseguenza $dx = -dy$, $\text{sen}\, x = \cos y$, $\cos x = \text{sen}\, y$, avremo il valor di $-\int dy \cos^n y$; e si troverà per esempio $\int dy \cos^6 y = C + \frac{1}{6} \text{sen}\, y \left(\cos^5 y + \frac{5}{4} \cos^3 y + \frac{5.3}{4.2} \cos y\right) + \frac{5.3.1}{6.4.2} y$; e $\int dy \cos^5 y = C + \frac{\text{sen}\, y}{5}\left(\cos^4 y + \frac{4}{3} \cos^2 y + \frac{4.2}{3.1}\right)$.

1039. Vogliasi anche $\int dy\, sen^m y\, cos^n y$. Fatto $cos\, y = x$, onde $dy = -dx(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$, riduco (1020) $\int dy\, sen^m y\, cos^n y = -\int x^n dx(1-x^2)^{\frac{m-1}{2}}$ o a $-\int dx(1-x^2)^{\frac{m-1}{2}} = \int dy\, sen^m y$ se n é pari, o a $-\int x dx(1-x^2)^{\frac{m-1}{2}} = \frac{sen^{m+1}y}{m+1}$ se n é impari, e restituiti i valori, ho $\int dy\, sen^m y\, cos^n y = C + \frac{sen^{m+1}y}{m+n}\left(cos^{n-1}y + \frac{(n-1)cos^{n-3}y}{m+n-2} + \frac{(n-1)(n-3)cos^{n-5}y}{(m+n-2)(m+n-4)} \text{ ec.}\right) + \frac{(n-1)(n-3)\ldots 1}{(m+n)(m+n-2)\ldots m+2} \times \int dy\, sen^m y$ se n è pari, e se è impari $+\frac{(n-1)(n-3)\ldots 2\, sen^{m+1}y}{(m+n)(m+n-2)\ldots m+1}$, presi i termini come sopra (1038). Così $\int dy\, cos^3 y\, sen^5 y = C + \frac{1}{8} sen^6 y(cos^2 y + \frac{1}{3}) = C + \frac{1}{8} sen^6 y(\frac{4}{3} - sen^2 y)$.

1040. Consideriamo ora i rotti, nei quali entrano seni, ec.; 1.° $\int \frac{dy}{sen\, y} = \int \frac{dy}{2\, sen\frac{1}{2}y\, cos\frac{1}{2}y}$ (643) $= \int \frac{\frac{1}{2}dy}{cos^2\frac{1}{2}y\, tang\frac{1}{2}y} = l\, tang\frac{1}{2}y$ (924. 930). Fatto $y = 90° - z$, avremo 2.° $\int \frac{dz}{cos\, z} = -l\, tang(45° - \frac{z}{2}) = -l\, cot(45° + \frac{z}{2})$ (645. 5.°) $= l\, tang(45° + \frac{z}{2})$ (639. 20.°); 3.° $\int \frac{dy\, cos\, y}{sen\, y} = \int \frac{d(sen\, y)}{sen\, y} = l\, sen\, y = \int dy\, cot\, y$; 4.° $\int \frac{dy\, sen\, y}{cos\, y} = \int \frac{-d(cos\, y)}{cos\, y} = -l\, cos\, y = l\, sec\, y = \int dy\, tang\, y$; 5.° $\int \frac{dy}{sen\, y\, cos\, y} = \int \frac{dy}{cos^2 y\, tang\, y} = l\, tang\, y$.

1041. Posto ciò, cerco $\int \frac{dy}{sen^m y}$. Fatto $sen\, y = x^{-1}$, onde $dy = -x^{-1}dx(x^2-1)^{-\frac{1}{2}}$, riduco (1020) $\int \frac{dy}{sen^m y} = -\int x^{m-1} \times dx(x^2-1)^{-\frac{1}{2}}$ o a $-\int x dx(x^2-1)^{-\frac{1}{2}} = \int \frac{dy}{sen^2 y} = -cot\, y$ (930. 2.°) se m é pari, o a $-\int dx(x^2-1)^{-\frac{1}{2}} = \int \frac{dy}{sen\, y} = l\, tang\frac{1}{2}y$ (1040) se m è impari, e restituiti quindi i valori, ho $\int \frac{dy}{sen^m y} = -$

$\frac{\cos y}{m-1}\left(\frac{1}{sen^{m-1}y}+\frac{m-2}{(m-3)sen^{m-3}y}+\frac{(m-2)(m-4)}{(m-3)(m-5)sen^{m-5}y}+\text{ec.}\right)$

$-\frac{(m-2)(m-4)\ldots 2\cot y}{(m-1)(m-3)\ldots 1}$, presi $\frac{m-2}{2}$ termini, se m é pari; e se é impari, $+\frac{(m-2)(m-4)\ldots 1}{(m-1)(m-3)\ldots 2}\, l\,tang\,\tfrac{1}{2}y$, presi $\frac{m-1}{2}$ termini. E fatto come sopra $y=90°-z$ si avrà il valore di $-\int\frac{dz}{\cos^m z}$.

1042. È dunque facile integrar la formula $\frac{dy\cos^m y}{sen^n y}$, poiché se $m=2k+1$, si ha $\frac{dy\cos^{2k+1}y}{sen^n y}=\frac{d(sen\,y)}{sen^n y}(1-sen^2y)^k$, che, fatto $sen\,y=z$, diventa $z^{-n}dz(1-z^2)^k$ integrabile (950. 1°), giacchè qui k é un numero intero e positivo. Se $m=2k$, allora $\frac{dy\cos^{2k}y}{sen^n y}=\frac{dy(1-sen^2y)^k}{sen^n y}$, espressione che sviluppata s'integrerà per mezzo della formula $\int\frac{dy}{sen^m y}$ (1041). Lo stesso sarebbe per $\int\frac{dy\,sen^m y}{\cos^n y}$, e $\int\frac{dy}{sen^m y\cos^n y}$.

1043. Si cerchi $\int\frac{dy}{a+b\cos y}$. Fatto $\cos y=x$, onde $dy=-\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}}$, avremo $\int\frac{dy}{a+b\cos y}=-\int\frac{dx}{(a+bx)\sqrt{(1-x^2)}}$; quindi nel caso di $a>b$ sarà (1026) $\int\frac{dy}{a+b\cos y}=\frac{1}{\sqrt{(a^2-b^2)}}arc.\,tang$

$\frac{2\sqrt{(1-x^2)(a^2-b^2)}}{(a+b)(1+x)-(a+b)(1-x)}=\frac{1}{\sqrt{(a^2-b^2)}}arc.tang\frac{sen\,y\sqrt{(a^2-b^2)}}{a\cos y+b}=$

$\frac{1}{\sqrt{(a^2-b^2)}}arc.sen\frac{sen\,y\sqrt{(a^2-b^2)}}{a+b\cos y}=\frac{1}{\sqrt{(a^2-b^2)}}arc.\cos\frac{a\cos y+b}{a+b\cos y}$,

e nel caso di $a<b$, sarà (1026) $\int\frac{dy}{a+b\cos y}=\frac{1}{\sqrt{(b^2-a^2)}}\times$

$l\,\frac{\sqrt{(b^2-a^2)(1+x)}+(b-a)\sqrt{(1-x)}}{\sqrt{(b^2-a^2)(1+x)}-(b-a)\sqrt{(1-x)}}=\frac{1}{\sqrt{(b^2-a^2)}}\times$

$l\frac{\sqrt{(b+a)(1+\cos y)}+\sqrt{(b-a)(1-\cos y)}}{\sqrt{(b+a)(1+\cos y)}-\sqrt{(b-a)(1-\cos y)}}=\frac{1}{\sqrt{(b^2-a^2)}}\,l\frac{b+a\cos y+\sqrt{(b^2-a^2)}sen\,y}{a+b\cos y}$

Condizioni d' integrabilità per le funzioni differenziali di qualunque ordine, e con qualunque numero di variabili; ed integrazione di quelle che vi soddisfanno.

1044. Il differenziale Xdx di primo ordine, e in cui X sia funzione della sola x, potendosi o esattamente o per approssimazione decomporre in termiui della forma $px^m dx$, é nell' uno o nell' altro modo sempre integrabile. Anzi, se dx sia costante, con gli stessi due metodi integreremo ancora Xdx^n. Infatti posto $\int Xdx = y + C$, sarà $dx \int Xdx =$ (948. 2.°) $\int Xdx^2 = ydx + Cdx$, e nuovamente integrando, $\int\int Xdx^2 = \int ydx + Cx + C'$. Del pari $dx \int\int Xdx^2 = \int\int Xdx^3 = dx \int ydx + Cxdx + C'dx$, e $\int\int\int Xdx^3 = \int dx \int ydx + \frac{Cx^2}{2} + C'x + C''$, ec. Così, se $X = x^m$,

avremo $y = \frac{x^{m+1}}{m+1}$, $\int ydx = \frac{x^{m+2}}{(m+1)(m+2)}$; $\int dx \int ydx = \frac{x^{m+3}}{(m+1)(m+2)(m+3)}$, e $\int\int\int x^m dx^3 = \frac{x^{m+3}}{(m+1)(m+2)(m+3)} + \frac{Cx^2}{2} + C'x + C''$.

1045. Ma se dx non sia costante, o X sia funzione di più variabili, poiché allora i differenziali superiori al primo ordine nel primo caso, e quelli di qualunque ordine nel secondo risultano da più termini legati fra di loro con dei rapporti dipendenti dalle leggi della differenziazione: non ògni espressione di tal genere, che sia composta a capriccio, rappresenterà dei differenziali esatti ed integrabili; ma quelle sole le quali risponderanno a delle determinate condizioni, che preme di stabilire.

E prima di tutto le dimensioni relativamente ai differenziali delle variabili dovranno per la nota legge degli infinitesimi (905. 907) essere in ciascun termine al medesimo grado. Perciò un differenziale del primo ordine non conterrà termini con differenziali elevati al di sopra della prima potenza; e sapendosi che $d^n\phi$ e $d\phi^n$ sono d'un grado stesso (936), in quelli di secondo ordine si troveranno soltanto i differenziali secondi di ciascuna variabile, le seconde potenze e i prodotti a due a due dei differenziali

primi; in quelli del terzo si avranno i differenziali terzi, i prodotti dei secondi nei primi, le potenze terze di questi, i prodotti delle seconde nelle prime e di queste a tre a tre tra di loro; ec.

1046. Posto ciò sia $d^n\phi$ una funzione delle variabili x, y, e dei loro differenziali fino all' ordine n con dx costante. Facendo $\frac{dy}{dx}=p$, $\frac{dp}{dx}=q$, $\frac{dq}{dx}=r$, ec., cioè $dy=pdx$, $d^2y=dpdx=qdx^2$, $d^3y=dqdx^2=rdx^3$, ec., $d^n\phi$ diverrà funzione di x, y, p, q, r, ec., e del solo differenziale dx, che dovrà in tutti i termini trovarsi al medesimo grado n. Potrà dunque $d^n\phi$ rappresentarsi generalmente con βdx^n, supposto β funzione delle sole quantità finite x, y, p, q, r, ec., il cui numero dovrà essere manifestamente $n+2$.

1047. Si supponga intanto che βdx^n provenga da una, due o più differenziazioni o di una funzione finita o di una funzione differenziale di un ordine comunque minore di n; e sieno udx^{n-1}, $u'dx^{n-2}$, $u''dx^{n-3}$, ec. i suoi integrali primo, secondo, terzo, ec. Dunque per la possibilità di una, due o più integrazioni di βdx^n, dovranno verificarsi le equazioni $\int\beta dx^n=udx^{n-1}$, $\int udx^{n-1}=u'dx^{n-2}$, $\int u'dx^{n-2}=u''dx^{n-3}$ ec., o più semplicemente $\beta dx=du$, $udx=du'$, $u'dx=du''$, ec.

Ora quanto alla prima, differenziando (942) si ha

$$\beta dx=du=\left(\frac{du}{dx}\right)dx+\left(\frac{du}{dy}\right)dy+\left(\frac{du}{dp}\right)dp+\left(\frac{du}{dq}\right)dq \text{ ec.}$$

$$\text{e } \beta=\left(\frac{du}{dx}\right)+\left(\frac{du}{dy}\right)p+\left(\frac{du}{dp}\right)q+\left(\frac{du}{dq}\right)r+\text{ec.}$$

$$\left(\frac{d\beta}{dy}\right)=\left(\frac{d^2u}{dxdy}\right)+\left(\frac{d^2u}{dy^2}\right)p+\left(\frac{d^2u}{dpdy}\right)q+\left(\frac{d^2u}{dqdy}\right)r+\text{ec.}$$

$$\left(\frac{d\beta}{dp}\right)=\left(\frac{d^2u}{dxdp}\right)+\left(\frac{d^2u}{dydp}\right)p+\left(\frac{du}{dy}\right)+\left(\frac{d^2u}{dp^2}\right)q+\left(\frac{d^2u}{dqdp}\right)r \text{ ec.}$$

$$\left(\frac{d\beta}{dq}\right)=\left(\frac{d^2u}{dxdq}\right)+\left(\frac{d^2u}{dydq}\right)p+\left(\frac{d^2u}{dpdq}\right)q+\left(\frac{du}{dp}\right)+\left(\frac{d^2u}{dq^2}\right)r \text{ ec.}$$

ec. ec.

$$\left(\frac{d\beta}{dy}\right)dx=\left(\frac{d^2u}{dxdy}\right)dx+\left(\frac{d^2u}{dy^2}\right)dy+\left(\frac{d^2u}{dpdy}\right)dp+\left(\frac{d^2u}{dqdy}\right)dq+\text{ec.}$$

$$\left(\frac{d\beta}{dp}\right)dx=\left(\frac{d^2u}{dxdp}\right)dx+\left(\frac{d^2u}{dydp}\right)dy+\left(\frac{du}{dy}\right)dx+\left(\frac{d^2u}{dp^2}\right)dp+\left(\frac{d^2u}{dqdp}\right)dq$$

$$\left(\frac{d\beta}{dq}\right)dx=\left(\frac{d^2u}{dxdq}\right)dx+\left(\frac{d^2u}{dydq}\right)dy+\left(\frac{d^2u}{dpdq}\right)dp+\left(\frac{du}{dp}\right)dx+\left(\frac{d^2u}{dq^2}\right)dq$$

ec. ec.

Ma essendo i coefficienti $\left(\frac{du}{dy}\right)$, $\left(\frac{du}{dp}\right)$, $\left(\frac{du}{dq}\right)$, ec. funzioni essi pure delle variabili contenute in u, si ha

$$d\left(\frac{du}{dy}\right)=\left(\frac{d^2u}{dydx}\right)dx+\left(\frac{d^2u}{dy^2}\right)dy+\left(\frac{d^2u}{dydp}\right)dp+\left(\frac{d^2u}{dydq}\right)dq+\text{ec.}$$

$$d\left(\frac{du}{dp}\right)=\left(\frac{d^2u}{dpdx}\right)dx+\left(\frac{d^2u}{dpdy}\right)dy+\left(\frac{d^2u}{dp^2}\right)dp+\left(\frac{d^2u}{dpdq}\right)dq+\text{ec.}$$

$$d\left(\frac{du}{dq}\right)=\left(\frac{d^2u}{dqdx}\right)dx+\left(\frac{d^2u}{dqdy}\right)dy+\left(\frac{d^2u}{dqdp}\right)dp+\left(\frac{d^2u}{dq^2}\right)dq+\text{ec.};$$

dunque, poiché (943. 2.°) $\left(\frac{d^2u}{dmdn}\right)=\left(\frac{d^2u}{dndm}\right)$, fatto per comodo $\left(\frac{d\beta}{dy}\right)=\mathrm{N}$, $\left(\frac{d\beta}{dp}\right)=\mathrm{P}$, $\left(\frac{d\beta}{dq}\right)=\mathrm{Q}$, ec., avremo facilmente $\mathrm{N}=\frac{1}{dx}d\left(\frac{du}{dy}\right)$, $\mathrm{P}=\left(\frac{du}{dy}\right)+\frac{1}{dx}d\left(\frac{du}{dp}\right)$, $\mathrm{Q}=\left(\frac{du}{dp}\right)+\frac{1}{dx}d\left(\frac{du}{dq}\right)$, ec.

1048. Ora se, come abbiamo osservato, in βdx^n ossia in β le variabili x, y, p, q, r, ec. si trovano in numero di $n+2$; saranno $n+1$ in udx^{n-1} ossia in u: onde, ponendo successivamente $n=1$, $=2$, $=3$, ec., u sarà funzione soltanto di x, y nel primo caso, di x, y, p nel secondo, di x, y, p, q, nel terzo, ec., ed avremo quindi per $n=1$, $\mathrm{P}=\left(\frac{du}{dy}\right)$, $\mathrm{N}=\frac{1}{dx}d\mathrm{P}$, ed $\mathrm{N}-\frac{1}{dx}d\mathrm{P}=0$; per $n=2$, $\mathrm{Q}=\left(\frac{du}{dp}\right)$, $\mathrm{P}=\left(\frac{du}{dy}\right)+\frac{1}{dx}d\mathrm{Q}$, $\mathrm{N}=\frac{1}{dx}d\mathrm{P}-\frac{1}{dx^2}d^2\mathrm{Q}$, ed $\mathrm{N}-\frac{1}{dx}d\mathrm{P}+\frac{1}{dx^2}d^2\mathrm{Q}=0$; per $n=3$, $\mathrm{R}=\left(\frac{du}{dq}\right)$, $\mathrm{Q}=$

$\left(\frac{du}{dp}\right)+\frac{1}{dx}dR$, $P=\left(\frac{du}{dy}\right)+\frac{1}{dx}dQ-\frac{1}{dx^2}d^2R$, $N=\frac{1}{dx}dP-\frac{1}{dx^2}d^2Q+\frac{1}{dx^3}d^3R$, ed $N-\frac{1}{dx}dP+\frac{1}{dx^2}d^2Q-\frac{1}{dx^3}d^3R=0$, e in generale, qualunque siasi il valore di n, $N-\frac{1}{dx}dP+\frac{1}{dx^2}d^2Q-\frac{1}{dx^3}d^3R+\frac{1}{dx^4}d^4S-$ec.$=0$, formula esprimente la condizione necessaria perchè possa aver luogo l'equazione $\beta dx=du$, ossia perchè possa integrarsi una prima volta la funzione βdx^n, o la data $a^n\Phi$ differenziale dell'ordine n.

1049. Ma perchè possa integrarsi una seconda volta e sussistere ancora l'altra equazione $udx=du'$, osserveremo che la forma di questa equazione ricade in quella della precedente, cangiatovi solo β in u, ed u in u'; dunque potrà concludersi la condizione per la sussistenza di questa, introducendo gli stessi cangiamenti nella formula già trovata per la sussistenza dell'altra; il che darà per nuova condizione $\left(\frac{du}{dy}\right)-\frac{1}{dx}d\left(\frac{du}{dp}\right)+\frac{1}{dx^2}d^2\left(\frac{du}{dq}\right)-\frac{1}{dx^3}d^3\left(\frac{du}{dr}\right)+$ec.$=0$. Ma dai valori già trovati per P, Q, ec. é facile dedurre che

$$\left(\frac{du}{dy}\right)=P-\frac{1}{dx}dQ+\frac{1}{dx^2}d^2R-\frac{1}{dx^3}d^3S+\text{ec.}$$
$$\left(\frac{du}{dp}\right)=Q-\frac{1}{dx}dR+\frac{1}{dx^2}d^2S-\text{ec.}$$
$$\left(\frac{du}{dq}\right)=R-\frac{1}{dx}dS+\text{ec.},$$

sostituendo adunque si troverà $P-\frac{2}{dx}dQ+\frac{3}{dx^2}d^2R-\frac{4}{dx^3}d^3S+$ ec.$=0$, condizione necessaria perchè possa integrarsi una seconda volta il proposto differenziale.

Con simile raziocinio si troveranno per condizioni d'integrazioni ulteriori

$$Q-\frac{3}{dx}dR+\frac{6}{dx^2}d^2S-\text{ec.}=0$$

$$R-\frac{4}{dx}dS+\frac{10}{dx^2}d^2T-\text{ec.}=0,$$ con legge assai manifesta.

1050. Frattanto si concepirà facilmente, 1.° che queste equazioni eguaglieranno in numero l'ordine della proposta; 2.° che se oltre x, y si abbiano in $d^n\Phi$ le variabili z, ω, ec., ponendo $\frac{dz}{dx}=p'$, $\frac{dp'}{dx}=q'$, ec., $\frac{d\omega}{dx}=p''$, $\frac{dp''}{dx}=q''$, ec., sarà β funzione di x, y, p, q, ec., z, p', q', ec., ω, p'', q'', ec., e fatto $\left(\frac{d\beta}{dz}\right)=N'$, $\left(\frac{d\beta}{dp'}\right)=P'$, $\left(\frac{d\beta}{dq'}\right)=Q'$, ec., $\left(\frac{d\beta}{d\omega}\right)=N''$, $\left(\frac{d\beta}{dp''}\right)=P''$, ec., oltre le stabilite equazioni tra N, P, Q, ec., dovranno sussisterne delle simili fra N', P', Q', ec., N'', P'', Q'', ec.. Infatti poiché z, ω, ec. sono indipendenti da y, e come costanti rapporto a questa variabile, la loro presenza nella funzione non distrugge, nè altera le condizioni, che unicamente si riferiscono ad y; e dall'altro canto se queste si verificano riguardo ad y, che insomma non é che una variabile qualunque, debbon dunque verificarsi anche per z, ω, ec. 3.° Perciò le equazioni di condizione per ciascun ordine differenziale son tante quante le variabili meno la x, il cui differenziale è costante. 4.° E questo numero e le stesse equazioni condizionali avran luogo ancor che manchi dx, e per conseguenza x nel differenziale proposto; mentre ciò non impedisce, che possa farsi $dy=pdx$, $dp=qdx$, ec., ed aversi $d^n\Phi=\beta dx^n$ con tutto il restante. 5.° Potremo perciò usarle anche nel caso di dx variabile o di $d^n\Phi$ funzione della sola x, ponendo $x=v$, e trattando v al pari delle variabili y, z, ec. 6.° Se $n=1$, e $d\Phi=Adx+Bdy+Cdz+$ec., sarà $\beta=A+Bp+Cp'+$ec., $N=\left(\frac{dA}{dy}\right)+p\left(\frac{dB}{dy}\right)+p'\left(\frac{dC}{dy}\right)+$ec., $N'=\left(\frac{dA}{dz}\right)+p\left(\frac{dB}{dz}\right)+p'\left(\frac{dC}{dz}\right)+$ec., valori che sostituiti con quelli di p, p', ec. (1046), di $dP=dB=\left(\frac{dB}{dx}\right)dx+\left(\frac{dB}{dy}\right)dy+\left(\frac{dB}{dz}\right)dz+$ec., e di $dP'=dC=\left(\frac{dC}{dx}\right)dx+\left(\frac{dC}{dy}\right)dy+\left(\frac{dC}{dz}\right)dz+$ ec. nelle equazioni $N-\frac{dP}{dx}=0$, $N'-\frac{dP'}{dx}=0$, ec. daranno $\left(\left(\frac{dA}{dy}\right)-\left(\frac{dB}{dx}\right)\right)dx+\left(\left(\frac{dC}{dy}\right)-\left(\frac{dB}{dz}\right)\right)dz+$ec.$=0$, $\left(\left(\frac{dA}{dz}\right)-\left(\frac{dC}{dx}\right)\right)dx+\left(\left(\frac{dB}{dz}\right)-\right.$

$\left(\frac{dC}{dy}\right)\Big)dr+\text{ec.}=0$, ec.; e, per l' indipendenza delle variabili, $\left(\frac{dA}{dy}\right)=\left(\frac{dB}{dx}\right)$. $\left(\frac{dA}{dz}\right)=\left(\frac{dC}{dx}\right)$. $\left(\frac{dB}{dz}\right)=\left(\frac{dC}{dy}\right)$, ec., condizioni semplicissime e che trovammo anche allrove (943. 2.°).

1051. Ma si venga agli esempj, e sia I. $d\Phi=(2y^2+4bz^2x^2)\times xdx+\left(\frac{1}{\sqrt{(y^2+z^2)}}+3y+2x^2\right)ydy+\left(4z^2+2bx^4+\frac{1}{\sqrt{(y^2+z^2)}}\right)zdz$. Avremo $\left(\frac{dA}{dy}\right)=4xy=\left(\frac{dB}{dx}\right)$, $\left(\frac{dA}{dz}\right)=8bx^3z=\left(\frac{dC}{dx}\right)$, $\left(\frac{dB}{dz}\right)=-\frac{yz}{\sqrt{(y^2+z^2)^3}}=\left(\frac{dC}{dy}\right)$, e la data espressione é integrabile (1050).

II. Sia $d^2\Phi=-x(dx+dy)^2 sen(x+y)+(2dx^2+2dxdy+xd^2y)cos(x+y)$. Avremo (1047) $\beta=-x(1+p)^2 sen(x+y)+(2+2p+qx)cos(x+y)$; onde $N=-x(1+p)^2cos(x+y)-(2+2p+qx)\,sen(x+y)$; $P=-2x(1+p)\,sen(x+y)+2cos(x+y)$, $\frac{dP}{dx}=-2x(1+p)^2cos(x+y)-2(2+2p+qx)sen(x+y)$; $Q=x\,cos\times(x+y)$, $\frac{2dQ}{dx}=-2x(1+p)sen(x+y)+2cos(x+y)$, $\frac{d^2Q}{dx^2}=-x(1+p)^2cos(x+y)-(2+2p+qx)sen(x+y)$, ove è evidente che $N-\frac{dP}{dx}+\frac{d^2Q}{dx^2}=0$, come pure $P-\frac{2dQ}{dx}=0$; e perciò l' espressione data è due volte integrabile (1049).

III. Sia $d^3\Phi=ydxd^2z+xdyd^2z+xyd^3z$. Dunque $\beta=q'y+pq'x+r'xy$, $N=q'+r'x$, $P=q'x$, $\frac{dP}{dx}=q'+r'x$, $Q=0=\frac{2dQ}{dx}=\frac{d^2Q}{dx^2}$, $R=0=\frac{3dR}{dx}=\frac{3d^2R}{dx^2}=\frac{d^3R}{dx^3}$, $N'=0$, $P'=0=\frac{dP'}{dx}$, $Q'=y+px$, $\frac{2dQ'}{dx}=4p+2qx$, $\frac{d^2Q'}{dx^2}=3q+rx$, $R'=xy$, $\frac{3dR'}{dx}=3y+3px$, $\frac{3d^2R'}{dx^2}=6p+3qx$, $\frac{d^3R'}{dx^3}=3q+rx$. Han dunque luogo le equazioni $N-\frac{dP}{dx}+\frac{d^2Q}{dx^2}-\frac{d^3R}{dx^3}=0$, $N'-\frac{dP'}{dx}+\frac{d^2Q'}{dx^2}-\frac{d^3R'}{dx^3}=0$, ma non già

le rimanenti $P-\frac{2dQ}{dx}+\frac{3d^2R}{dx^2}=0$, $P'-\frac{2dQ'}{dx}+\frac{3d^2R'}{dx^2}=0$, ec., onde il proposto differenziale è una sola volta integrabile (1049).

IV. Sia $d^2\Phi=6ydx^2+12xdxdy+3x^2d^2y+6xyd^2x$, cangiato x in v (1050.5.°), avremo $d^2\Phi=6ydv^2+12vdvdy+3v^2d^2y+6vyd^2v$, e sarà $\beta=6p'^2y+12pp'v+3qv^2+6q'vy$; onde $N=6p'^2+6q'v$, $P=12p'v$, $\frac{dP}{dx}=12q'v+12p'^2$, $Q=3v^2$, $\frac{2dQ}{dx}=12p'v$, $\frac{d^2Q}{dx^2}=6q'v+6p'^2$, $N'=12pp'+6qv+6q'y$, $P'=12p'y+12pv$, $\frac{dP'}{dx}=24pp'+12q'y+12qv$, $Q'=6vy$, $\frac{2dQ'}{dx}=12pv+12p'y$, $\frac{d^2Q'}{dx^2}=6qv+12pp'+6q'y$: perciò verificandosi le equazioni $N-\frac{dP}{dx}+\frac{d^2Q}{dx^2}=0$, $P-\frac{2dQ}{dx}=0$, $N'-\frac{dP'}{dx}+\frac{d^2Q'}{dx^2}=0$, $P'-\frac{2dQ'}{dx}=0$, l' espressione é due volte integrabile.

V. Sia $d^3\Phi=12dxd^2x+4xd^3x=12dvd^2v+4vd^3v$. Dunque $\beta=12pq+4rv$, $N=4r$, $P=12q$, $\frac{dP}{dx}=12r$, $Q=12p$, $\frac{2dQ}{dx}=24q$, $\frac{d^2Q}{dx^2}=12r$, $R=4v$, $\frac{3dR}{dx}=12p$, $\frac{3d^2R}{dx^2}=12q$, $\frac{d^3R}{dx^3}=4r$, valori che sostituiti nelle tre prime equazioni di condizione, mostrano che la funzione data può tre volte integrarsi.

1052. Stabilite in tal guisa le condizioni d' integrabilità, ecco dei facili metodi per integrare la funzione $d^n\Phi$, quando vi soddisfaccia. Sia in primo luogo $n=1$, e $d\Phi=Adx+Bdy+Cdz+$ ec.; poiché Adx è il differenziale parziale di Φ per x, integrandolo per x avremo tutti termini di Φ, ove trovasi questa variabile. Del pari integrando Bdy, Cdz, ec. per y, z, ec., avremo tutti quelli con y, z, ec. Dunque nella somma totale S di questi integrali parziali sarà contenuto interamente Φ, solo che i prodotti di due o più variabili, dovendo necessariamente far parte di più integrali parziali, vi si vedranno tante volte ripetuti, quante in ciascun dei termini son le variabili: onde converrà dividergli per questo numero affinché S rappresenti esattamente Φ. Dunque *per integrare una funzione differenziale di primo ordine*

a più variabili, quando soddisfaccia ai criterj d' integrabilità, dovranno prendersi e quindi sommarsi gl' integrali parziali per ognuna delle variabili, e dividere i termini della somma ridotta per il numero delle variabili, che in ciascuno son contenute, aggiungendo in fine la consueta costante. Così nell' esempio I.° integrando parzialmente prima per x, poi per y, infine per z, e quindi sommando, avremo $S=2y^2x^2+2bz^2x^4+2\sqrt{(y^2+z^2)}+y^3+z^4$; onde $\Phi=y^2x^2+bz^2x^4+\sqrt{(y^2+z^2)}+y^3+z^4+C$.

1053. Sia $n=2$, e dx costante, cioè $d^2\Phi=$ (1045) $Edx^2+Fdxdy+Gdxdz+\text{ec.}+Hd^2y+Ld^2z+$ ec., e se ne voglia l' integrale primo $d\Phi$. Fatto $d\Phi=Adx+Bdy+Cdz+\text{ec.}$, avremo $d^2\Phi=\left(\frac{dA}{dx}\right)dx^2+\left(\left(\frac{dA}{dy}\right)+\left(\frac{dB}{dx}\right)\right)dxdy+\left(\left(\frac{dA}{dz}\right)+\left(\frac{dC}{dx}\right)\right)dxdz+\text{ec.}+Bd^2y+Cd^2z+\text{ec.}$ Dunque 1.° $B=H$, $C=L$, ec., cioè i coefficienti dei differenziali variabili dy, dz, ec. in $d\Phi$ son gli stessi che quelli di d^2y, d^2z, ec. in $d^2\Phi$; onde per aver $d\Phi$ non resta che trovare A, se pur dx non fosse variabile, poichè in tal caso é manifesto, che avremo A dal coefficiente di dx. Ora 2.° $\left(\frac{dA}{dx}\right)=E$, $\left(\frac{dA}{dy}\right)+\left(\frac{dB}{dx}\right)=F$, $\left(\frac{dA}{dz}\right)+\left(\frac{dC}{dx}\right)=G$, ec., e di qui $\left(\frac{dA}{dx}\right)dx+\left(\frac{dA}{dy}\right)dy+\left(\frac{dA}{dz}\right)dz+\text{ec.}\ (=dA)=Edx+\left(F-\left(\frac{dB}{dx}\right)\right)dy+\left(G-\left(\frac{dC}{dx}\right)\right)dz+\text{ec.}$, valore che integrato (1052) determina A. Nell' esempio II.° abbiamo $E=-x\,sen(x+y)+2\cos(x+y)$, $F=-2x\,sen(x+y)+2\cos(x+y)$ e $H=B=x\cos(x+y)$. Dunque $dA=-x(dx+dy)sen(x+y)+dx\cos(x+y)+(dx+dy)\cos(x+y)$, $A=$ (952 1052) $x\cos(x+y)+sen(x+y)$, e $d\Phi=dx\cos(x+y)+dx\,sen(x+y)+xdy\cos(x+y)=d(x\,sen(x+y))$. Ma nel IV.°, ove dx è variabile, dai coefficienti di d^2x e d^2y avremo immediatamente $d\Phi=6xy\,dx+3x^2dy=d(3x^2y)$.

1054. Sia $n=3$, e come sopra dx costante, cioé, limitandoci per semplicità a due sole variabili, $d^3\Phi=$ (1045) $Ed^3y+Fdxd^2y+Gdyd^2y+Hdx^3+Ldx^2dy+Kdxdy^2+Idy^3$. Supponendo che $d^2\Phi=Ad^2y+Bdx^2+Cdy^2+Ddxdy$ ne sia l' integrale, avremo differenziando, $d^3\Phi=Ad^3y+$

$\left(\left(\frac{dA}{dx}\right)+D\right)dxd^2y+\left(\left(\frac{dA}{dy}\right)+2C\right)dyd^2y+\left(\frac{dB}{dx}\right)dx^3+\left(\left(\frac{dB}{dy}\right)\right.$ $\left.+\left(\frac{dD}{dx}\right)\right)dx^2dy+\left(\left(\frac{dC}{dx}\right)+\left(\frac{dD}{dy}\right)\right)dxdy^2+\left(\frac{dC}{dy}\right)dy^3$. Dunque $A=E$, $2C=G-\left(\frac{dA}{dy}\right)$, $D=F-\left(\frac{dA}{dx}\right)$, $\left(\frac{dB}{dx}\right)=H$, $\left(\frac{dB}{dy}\right)=L-\left(\frac{dD}{dx}\right)$. Dalle tre prime equazioni si hanno i valori di A, C, D; l'ultime danno $\left(\frac{dB}{dx}\right)dx+\left(\frac{dB}{dy}\right)dy=dB=Hdx+Ldy-\left(\frac{dD}{dx}\right)dy$, differenziale del 1.° ordine, che integrato (1052), farà conoscer B. Nel modo stesso si avranno gl' integrali degli ordini superiori.

Integrazione delle equazioni Differenziali.

Come vi é divario fra i differenziali delle funzioni e quelli delle equazioni, così ve ne ha fra i di loro integrali. Per integrare una funzione è necessario rimontare a quell' espressione finita, la cui differenziazione renda la data. Per integrare un' equazione basta che in qualche modo si giunga a determinare il rapporto finito delle variabili. Il vocabolo *integrazione* ha dunque in questo caso un senso molto più esteso, ed equivale in somma a *soluzione*; nel qual significato le regole che abbiamo date per le semplici funzioni non possono esser né sufficienti, né sempre applicabili all' integrazione dell' equazioni.

1055. Sia l' equazione $Adx+Bdy=0$ del primo ordine e a due sole variabili. Questa s' integra generalmente 1.° se $\left(\frac{dA}{dy}\right)=\left(\frac{dB}{dx}\right)$, o il di lei primo membro é un differenziale esatto (1050); 2.° Se possa giungersi a separare l' una dall' altra le due variabili in modo che A resti funzione della x, B della sola y, mentre allora $\left(\frac{dA}{dy}\right)=0=\left(\frac{dB}{dx}\right)$; 3.° Se si trovi un moltiplicatore M atto a render differenziale esatto il primo membro della proposta.

1056. Nel primo caso l' integrazione si riduce a quella delle funzioni, e l' equazione si chiama *integrabile per se stessa*, e anche *reale*, denominazione che ritiene del pari tutte le volte che può comunque integrarsi.

1057. La separazione riesce molto comodamente, 1.° se $A=XY$, $B=X'Y'$, nel qual caso si ha $\frac{Xdx}{X'}+\frac{Y'dy}{Y}=0$, equazion separata; 2.° se A, B son funzioni omogenee di x, y allo stesso numero di dimensioni; poichè, fatto $x=yz$, sarà $\frac{B}{A}$ una funzione Z di z, e si avrà $dx+Zdy=0=zdy+ydz+Zdy$, e separando, $\frac{dz}{Z+z}=-\frac{dy}{y}$. Così $(ax+by)dx=(mx+ny)dy$, fatto $x=yz$, onde $\frac{B}{A}=Z=\frac{-mz-n}{az+b}$, diviene $-\frac{dy}{y}=\frac{(az+b)dz}{az^2+(b-m)z-n}$, equazione facile a integrarsi (1024. 4.° 1027).

1058. Negli altri casi o la separazione è affatto impossibile, o si esigono dell' artificiose sostituzioni per ottenerla. D'ordinario si sostituisce con frutto eguagliando ad una nuova variabile i termini, che ammettono integrazione; ma non vi è regola generale per sostituire, e poichè il molto esercizio supplisce in questi casi alle regole, porremo qui varj esempj di sostituzioni, con cui si giunge a separar le variabili in diverse equazioni del primo ordine.

I. $(a+bx+cy)dx=(e+fx+gy)dy$; supponendo A, B tali, che sia $a+bA+cB=0=e+fA+gB$, si ponga $x=t+A$, $y=u+B$, avremo, dopo aver sostituito e ridotto, $(bt+cu)dt=(ft+gu)du$, equazione omogenea.

II. $(2y+x)dy+ydx=(a+x+y)Ydy$; fatto $x+y=z$, viene $ydz+zdy=(a+z)Ydy$; fatto $yz=u$, viene $du-\frac{uYdY}{y}=aYdy$; fatto $\frac{Ydy}{y}=\frac{dq}{q}$, viene $\frac{qdu-udq}{q^2}=\frac{aYdy}{q}$; fatto $\frac{u}{q}=p$, viene infine $dp=\frac{aYdy}{q}$.

III. $\frac{(2x^2+y^2)dx+xydy}{x^4+x^2y^2+a^4}=\frac{xdx+ydy}{a^2\sqrt{(x^2+y^2)}}$; fatto $x^2+y^2=z^2$, viene $\frac{z(xdz+zdx)}{x^2z^2+a^4}=\frac{dz}{a^2}$; fatto $zx=p$, viene $\frac{a^2dp}{p^2+a^4}=\frac{dz}{z}$.

IV. $(a^2-x^2)dy+yxdx=adx\sqrt{(x^2+y^2-a^2)}$; fatto $a^2-x^2=\frac{y^2}{u^2}$, onde $-xdx=\frac{uydy-y^2du}{u^3}$, verrà $\frac{y^2du}{u^2}=adx\sqrt{(u^2-1)}$, che facilmente si separa.

V. $\frac{Ydy}{x^2} = aY'dy - \frac{dx}{x}$; fatto $aY'dy = \frac{dz}{z}$, viene $\frac{Ydy}{x^3} = \frac{xdz - zdx}{zx^2}$; fatto $\frac{z}{x} = p$, viene $\frac{Ydy}{z^2} = \frac{dp}{p^3}$.

VI. $mydx + nxdy = y^r dy$ ovvero $xy(\frac{mdx}{x} + \frac{ndy}{y}) = y^r dy$; fatto $mlx + nly = lp$, $x^m y^n = p$, viene $\frac{dp}{p} \sqrt[m]{\frac{p}{y^n}} = y^{r-1} dy$, cioé $\frac{dp}{\sqrt[m]{p^{m-1}}} = dy \sqrt[m]{y^{n+m(r-1)}}$.

VII. $dy + y^2 dx = ax^m dx$. Se $m = 0$, avremo $\frac{dy}{a - y^2} = dx$; se $m = -2$, fatto $y = \frac{1}{z}$, l' equazione diverrà omogenea, ed in conseguenza separabile (1057. 2.°); e può anche divenirlo in un infinità di altri valori di m, tutti però compresi fra zero e -4. Infatti ponendo successivamente $x = t^{\frac{1}{m+1}}, = t^{-1}$; $y = \frac{a}{(m+1)z}, = t - t^2 z$, avremo le trasformate $dz + z^2 dt = \frac{a}{(m+1)^2} \times t^{-\frac{m}{m+1}} dt$, $dz + z^2 dt = at^{-m-4} dt$, le quali essendo simili alla proposta, ci dicono che se abbia luogo la separazione in un caso qualunque per esempio quando $m = n$, deve averlo ancora quando $m = -\frac{n}{n+1}$, e quandp $m = -n - 4$: ma riesce quando $m = 0$, dunque usando alternativamente i due valori di m si troverà aver luogo anche nei casi di $m = -4, = -\frac{4}{3}, = -\frac{8}{3}, = -\frac{8}{5}$, ec., ed in generale quando sia $m = \frac{-4i}{2i \pm 1}$, essendo i un numero intero e positivo.

VIII. $ax^m y^n dx^p dy^q + bx^{m'} y^{n'} dx^{p'} dy^{q'} + cx^{m''} y^{n''} dx^{p''} dy^{q''}$ + ec. $= 0$, ove per la natura di tali equazioni si ha sempre $p + q = p' + q' = p'' + q''$ = ec. : fatto $y = z^r$, ella diventa $r^q ax^m z^{r(n+q)-q} dx^p dz^q + r^{q'} bx^{m'} z^{r(n'+q')-q'} dx^{p'} dz^{q'} + r^{q''} cx^{m''} z^{r(n''+q'')-q''} dx^{p''} dz^{q''}$ + ec. $= 0$, e sarà omogenea se

$m+r(n+q)-q=m'+r(n'+q')-q'=m''+r(n''+q'')-q''=$ ec.,
cioè se $r=\frac{m-q-m'+q'}{n'+q'-n-q}=\frac{m-q-m''+q''}{n''+q''-n-q}=$ ec. Così l'equazione $ay^2x^2dx+bdx+cyxdx+fx^4y^2dy=0$ dà $m=n=2$, $m'=n'=0$, $m''=n''=1$, $m'''=4$, $n'''=2$, $q=q'=q''=0$, $q'''=1$, e però $r=\frac{2}{-2}=\frac{2-1}{1-2}=\frac{2-4+1}{2+1-2}=-1$: dunque fatto $y=z^{-1}$, si avrà $az^{-2}x^2dx+bdx+cz^{-1}xdx-fx^4z^{-4}dz=0$, equazione omogenea e perciò integrabile (1057. 2.°). Del resto se taluno dei rotti $\frac{m-q-m'+q'}{n'+q'-n-q}$, ec. divenisse $\frac{0}{0}$, non se ne farebbe conto, ciò solamente significando, che qualunque valore di r rende omogenei i termini, d'onde quel rotto resulta; e se divenissero $\frac{0}{0}$ tutti i rotti, o andassero a zero tutti i loro numeratori o denominatori, ciò indicherebbe che per separar le variabili non vi è bisogno di metodo.

1059. Si avvertirà infine, che deve riguardarsi come non integrabile l'equazione $Xdx=Ydy$, benché separata, quando verun dei due integrali $\int Xdx$, $\int Ydy$ può aversi algebricamente: se pur non riesca per altre vie d'incontrare una qualche equazione finita ed algebrica, che soddisfaccia alla proposta e che possa dirsene l'integrale, come in qualche caso succede. Sia per esempio $\frac{dx}{\sqrt{(a^2+x^2)}}=\frac{dy}{\sqrt{(a^2+y^2)}}$, a cui si riduce l'altra $\frac{dx}{\sqrt{(a^2+bx+cx^2)}}=\frac{dy}{\sqrt{(a^2+by+cy^2)}}$. Moltiplicando per xy, ed integrando quindi per parti, si ha $y\sqrt{(a^2+x^2)}-\int dy\sqrt{(a^2+x^2)}=x\sqrt{(a^2+y^2)}-\int dx\sqrt{(a^2+y^2)}$. Ma per la proposta $\int dx\sqrt{(a^2+y^2)}=\int dy\sqrt{(a^2+x^2)}$: dunque $y\sqrt{(a^2+x^2)}=x\sqrt{(a^2+y^2)}$.

Sia $\frac{dx}{\sqrt{(a+cx^2+fx^4)}}=\frac{dy}{\sqrt{(a+cy^2+fy^4)}}$, a cui si riducono $\frac{dx}{\sqrt{(a+bx+cx^2+ex^3+fx^4)}}=\frac{dy}{\sqrt{(a+by+cy^2+ey^3+fy^4)}}$ e $\frac{dx}{\sqrt{(1-c^2sen^2x)}}=\frac{dy}{\sqrt{(1-c^2sen^2y)}}$. Si eguagli ciascun membro a dt e si concludano le due equazioni $\frac{dx^2}{dt^2}=a+cx^2+fx^4$, $\frac{dy^2}{dt^2}=$

$a+cy^2+fy^4$. La lor differenza, postovi $x+y=p$, $x-y=q$, darà $\frac{dpdq}{dt^2}=cpq+\frac{1}{2}fpq(p^2+q^2)$, e la somma dei lor differenziali, $\frac{d^2p}{dt^2}=cp+\frac{1}{2}fp(p^2+3q^2)=\frac{dpdq}{qdt^2}+fpq^2$. Dunque $\frac{2d^2pdp}{q^2dt^2}-\frac{2dp^2dq}{q^3dt^2}=2fpdp$, e integrando con dt costante, $\frac{dp^2}{q^2dt^2}=fp^2+C$. Posti dunque i valori di p, q e $\frac{dp}{dt}=\sqrt{(a+cx^2+fx^4)}+\sqrt{(a+cy^2+fy^4)}$, avremo per l' integrale cercato, $\sqrt{(a+cx^2+fx^4)}+\sqrt{(a+cy^2+fy^4)}=(x-y)\sqrt{(C+f(x+y)^2)}$.

1060. Per i casi che non ammettono separazione, resterebbe il ricorso al moltiplicatore M, di cui abbiamo parlato in 5.° luogo (1055). E realmente può dimostrarsi, che non solo questo moltiplicatore ha sempre luogo per rapporto all' equazione $Adx+Bdy=0$, ma che possono trovarsi infiniti altri fattori della forma $\varphi'M$ tutti idonei a rendere integrabile la data, quando non lo sia da se stessa. Infatti si ponga $\frac{A}{B}=\left(\frac{dM}{dx}\right):\left(\frac{dM}{dy}\right)$, e moltiplicando la proposta per $\varphi'M$, avremo $\varphi'M(Adx+Bdy)=0=\varphi'M\left(\frac{A}{B}dx+dy\right)=\varphi'M\left(\left(\frac{dM}{dx}\right)dx:\left(\frac{dM}{dy}\right)+dy\right)=\varphi'M\left(\left(\frac{dM}{dx}\right)dx+\left(\frac{dM}{dy}\right)dy\right)=dM\varphi'M=d(\varphi M)$, differenziale esatto: dal che si può anche concludere, che *ogni equazione di primo ordine a due variabili é sempre di sua natura integrabile*, teorema degno d' osservazione. Ma frattanto la difficoltà di risolver l' equazione a differenze parziali $A\left(\frac{dM}{dy}\right)-B\left(\frac{dM}{dx}\right)=0$, che determina M, rende assai poco praticabile, e di quasi niuna risorsa nell' attuale stato dell' analisi questo metodo d' integrare, se pure o non si presenti M da se stesso, o non si usi per ritrovarlo una di quelle solite industrie, con le quali non di rado suppliamo tanto felicemente alla mancanza delle regole generali.

1061. Si eccettui per altro il caso di $\left(\frac{dA}{dy}\right)-\left(\frac{dB}{dx}\right)$ funzione di x sola o di y sola, nel quale può determinarsi M con molta facilità. Infatti poiché $AMdx+BMdy=0$, deve supporsi integrabile in forza del moltiplicatore M, sarà dunque (943. 2.°) $\left(\frac{d(AM)}{dy}\right)=\left(\frac{d(BM)}{dx}\right)$, cioé $M\left(\frac{dA}{dy}\right)+A\left(\frac{dM}{dy}\right)=M\left(\frac{dB}{dx}\right)+B\times\left(\frac{dM}{dx}\right)$. Dunque $\left(\frac{dA}{dy}\right)-\left(\frac{dB}{dx}\right)=\frac{1}{M}\left(B\left(\frac{dM}{dx}\right)-A\left(\frac{dM}{dy}\right)\right)$. Ora se il primo membro é funzione della sola x, dovrà esserlo pure il secondo, e perciò anche M; onde $\left(\frac{dM}{dy}\right)=0$ e $\left(\frac{dM}{dx}\right)=$ (942) $\frac{dM}{dx}$, come pure $\left(\frac{dB}{dx}\right)=\frac{dB}{dx}$. Dunque sostituendo e riducendo, $\frac{1}{B}\left(\frac{dA}{dy}\right)dx-\frac{dB}{B}=\frac{dM}{M}$, e $lM=l\frac{1}{B}+\int\left(\frac{dA}{dy}\right)\frac{dx}{B}$, d' onde il valor cercato di M. Sia per esempio $y+\frac{pdy}{dx}-X=0$, ove p ed X son funzioni della sola x. Avremo $A=y-X$, $B=p$, onde $\int\left(\frac{dA}{dy}\right)\frac{dx}{B}=\int\frac{dx}{p}$, $lM=l\frac{1}{p}+\int\frac{dx}{p}$, ed $M=\frac{1}{p}e^{\int\frac{dx}{p}}$, fattore che rende integrabile la data. Infatti posto $\frac{dx}{p}=dz$, ella diverrà $ye^{z}dz+e^{z}dy-Xe^{z}dz=0$, e integrando, $ye^{z}-\int Xe^{z}dz=C$, cioé $y=e^{-\int\frac{dx}{p}}\left(\int\frac{Xdx}{p}e^{\int\frac{dx}{p}}+C\right)$. Così se sia $p=1$, $X=x^2$, avremo $y=e^{-x}(\int e^{x}x^2dx+C)=$ (1035) $Ce^{-x}+x^2-2x+2$. Si noti che a questa equazione si riducono 1.ª $pydx-dy+Xy^{n+1}dx=0$; 2.ª $py^{m+1}dx-y^{m}dy+Xy^{n}dx=0$; 3.ª $pXy^{m+1}\times dx-Xy^{m}dy+X'y^{n}dx=0$, col fare $\frac{1}{y^{n}}=u$ nella 1.ª, $y^{m-n+1}=u$ nella 2.ª, $\frac{X'}{X}=X''$ nella 3.ª

Vi si riduce inoltre la somma delle due serie $y = x^2 \mp \frac{x^4}{4} + \frac{3x^6}{4.6} \mp \frac{3.5x^8}{4.6.8} +$ ec., poichè differenziando e poi dividendo per x^3, si ha $\frac{dy}{x^3} = \frac{2dx}{x^2} \mp dx + \frac{3x^2dx}{4} \mp$ ec.; dunque $\int\frac{dy}{x^3} = -\frac{2}{x} \mp x + \frac{x^3}{4} \mp \text{ec.} = \frac{-2 \mp y}{x}$, onde differenziando, $\frac{dy}{x} = \mp xdy + (2 \pm y)dx$, cioè $y + \frac{dy}{dx}\left(\frac{1 \pm x^2}{\mp x}\right) \pm 2 = 0$, ed $M = \frac{\mp x}{1 \pm x^2} e^{\mp\int\frac{xdx}{1 \pm x^2}} = \frac{\mp x}{1 \pm x^2} e^{-l\sqrt{(1 \pm x^2)}}$ (948. 2.°) $= \frac{\mp x}{1 \pm x^2} e^{l\frac{1}{\sqrt{(1 \pm x^2)}}}$ (402) $= \frac{\mp x}{\sqrt{(1 \pm x^2)^3}}$ (410). Quindi $\frac{(1 \pm x^2)dy \mp yxdx - 2xdx}{\sqrt{(1 \pm x^2)^3}} = 0$, e integrando, $\frac{y \pm 2}{\sqrt{(1 \pm x^2)}} = C = \pm 2$; perchè $x=0$ dà $y=0$: dunque $y = \pm 2\sqrt{(1 \pm x^2)} \mp 2$.

Finalmente dipende da questa stessa equazione l' integrale di $y + \frac{ady}{dx} + \frac{bd^2y}{dx^2} + \ldots + \frac{sd^ny}{dx^n} = X$, ove a, b, c, ec. si suppongon costanti e che dicesi *equazione lineare*, perchè i rotti differenziali $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$, ec., i cui termini son d' un ordine stesso (935), non vi hanno dimensione veruna.

1062. Infatti se l' equazione sia di primo ordine, cioè $n=1$, avremo $y + \frac{ady}{dx} = X$, onde $p = a$ costante, ed $y = \frac{e^{-\frac{x}{a}}}{a}(\int Xe^{\frac{x}{a}}dx + C)$, e mancando X, $y = Ce^{-\frac{x}{a}}$.

1063. Se sia di secondo ordine, ovvero $n = 2$, ed $y + \frac{ady}{dx} + \frac{bd^2y}{dx^2} = X$, fatto $p = \frac{dy}{dx}$, ovvero $mp - \frac{mdy}{dx} = 0$ (m è indeterminata), e sommata questa con la data, viene I. $y + (a+m)p - (mdy - bdp)\frac{1}{dx} = X$, ove suppongo (giacchè l' indeterminata m

lo permette) che un m^{plo} della prima parte $y+(a+m)p$ sia l' integrale della seconda $mdy-bdp$; dunque $y+(a+m)p=\frac{1}{m}\int(mdy-bdp)=y-\frac{bp}{m}$; onde $a+m=-\frac{b}{m}$, e II. $m^2+am+b=0$, con che avremo m. Fatto ora III. $y+(a+m)p=u=y-\frac{bp}{m}$, e perciò $du=dy-\frac{bdp}{m}$ ovvero $mdu=mdy-bdp$, la I. diverrà $u-\frac{mdu}{dx}=X$, che integrata ci dà(1062)IV. $u=-\frac{e^{\frac{x}{m}}}{m}(\int Xe^{-\frac{x}{m}}dx+C)$ Quindi poichè dalla II. nascono due valori m', m'' di m, che posti nella IV. ne danno due u', u'' di u, la terza si scioglierà nelle due $y+(a+m')p=u'$, $y+(a+m'')p=u''$, dalle quali si ha la V. $y=\frac{(a+m')u''-(a+m'')u'}{m'-m''}$. Si osservi 1.° che qualora si abbia $b=\frac{a^2}{4}$, la III. non darà che una sola equazione, la quale peraltro essendo fra y, p ed u, cioè fra y, $\frac{dy}{dx}$ ed una funzione di x, può sempre integrarsi (1062): 2.° se m', m'' sieno immaginarj potrà supporsi $m=g\pm h\sqrt{-1}$ (160); onde $\frac{x}{m}=\frac{x(g\mp h\sqrt{-1})}{g^2+h^2}$, e fatto $\frac{gx}{g^2+h^2}=t$, $\frac{hx}{g^2+h^2}=z$, avremo $e^{\frac{x}{m}}=e^{t\mp z\sqrt{-1}}=(658)e^t(\cos z\mp\sqrt{-1}.\operatorname{sen} z)$.

1064. Se $n=3$ ed $y+\frac{ady}{dx}+\frac{bd^2y}{dx^2}+\frac{cd^3y}{dx^3}=X$, fatto $\frac{dy}{dx}=p$, $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dp}{dx}=q$, e perciò $\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{dq}{dx}$, l' equazione diverrà $y+ap+bq+\frac{cdq}{dx}=X$, che sommata con le due $mp-\frac{mdy}{dx}=0$, $kq-\frac{kdp}{dx}=0$ (k è una nuova indeterminata) dà I.^{a} $y+(a+m)p+(b+k)q-\frac{1}{dx}(mdy+kdp-cdq)=X$. Frattanto poichè m e k sono indeter-

minate; le suppongo tali che soddisfacciano alle equazioni II.ª $y+(a+m)p=\frac{1}{m}\int(mdy+kdp)=y+\frac{kp}{m}$, III.ª $(b+k)q=-\frac{1}{m}\int cdq=-\frac{cq}{m}$. La II.ª dà $a+m=\frac{k}{m}$, e la III.ª $b+k=-\frac{c}{m}$.

Dunque $am+m^2=k=-b-\frac{c}{m}$, cioè IV.ª $m^3+am^2+bm+c=0$, equazione che risoluta farà conoscere m, ed in conseguenza anche k. Si faccia adesso V.ª $y+(a+m)p+(b+k)q=u$, sarà $-\frac{1}{dx}(mdy+kdp-cdq)=-\frac{mdu}{dx}$, e quindi la I.ª diverrà VI.ª $u-\frac{mdu}{dx}=X$, e di qui u. Ma siccome la IV.ª dà tre valori m', m'', m''' di m d'onde se ne ha tre altri k', k'', k''' di k e questi posti nella VI.ª ne danno altrettanti u', u'', u''' di u; la V.ª dunque si scioglierà nelle tre VII.ª $y+(a+m')p+(b+k')q=u'$, VIII.ª $y+(a+m'')p+(b+k'')q=u''$, IX.ª $y+(a+m''')p+(b+k''')q=u'''$, per mezzo delle quali eliminando p e q si avrà immediatamente y dato per u', u'', u''', e dei coefficienti costanti. Che se nella IV.ª si abbiano due soli valori m', m'' di m, essendo il terzo eguale all' uno o all' altro di questi due, si avranno altresì due soli valori u', u'' di u, e la V.ª sarà risolubile nelle sole VII.ª e VIII.ª per mezzo delle quali eliminando q, si avrà un' equazione tra y, p ed u', u'', cioè tra y, $\frac{dy}{dx}$ ed una funzione X di x, che essendo lineare del primo ordine, é perciò sempre integrabile (1062). Se poi tutti i tre valori di m dati dalla IV.ª sieno eguali, non si cangerà in modo alcuno la V.ª Ma siccome questa é tra y, p, q ed u, cioè tra y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ ed X, é dunque lineare del secondo ordine, e perciò sempre completamente integrabile (1063).

1065. Or questo metodo, che a cagione delle indeterminate m ec. introdotte nell' equazioni, si chiama *dei Coefficienti indeterminati*, vale anche per l' equazioni lineari di qualunque ordine n^{simo}, le quali sommate con un numero $n-1$ d' equazioni $mp-\frac{mdr}{dx}=0$, $kq-\frac{kdp}{dx}=0$, $gr-\frac{gdq}{dx}=0$, ec., s' integreranno

con la stessa facilità: il giro però sarà in queste più lungo, attese l' equazioni $n-1$, da cui debbon dedursi i valori delle indeterminate k, g, ec. dati per m, e quelle del grado n^{simo}, dalla cui risoluzione dipendono m', m'', m''', ec., e quindi u', u'', u''', ec. Si avverta che se manchi y nell' equazione si potrà porre $\frac{dy}{dx}=z$, e in conseguenza $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dz}{dx}$, ec. Ma proponiamo qualche esempio.

I. Sia $y-\frac{dy}{dx}-\frac{3d^2y}{4dx^2}=2x$: avremo $a=-1$, $b=-\frac{3}{4}$, $X=2x$,

$m'=\frac{3}{2}$, $m''=-\frac{1}{2}$, $u'=Ce^{\frac{2x}{3}}+2x+3$, $u''=C'e^{-2x}+2x-1$ (1063),

ed $y=\frac{1}{4}C'e^{-2x}+\frac{3}{4}Ce^{\frac{2x}{3}}+2(x+1)$.

II. Sia $y-\frac{6dy}{dx}+\frac{12d^2y}{dx^2}-\frac{8d^3y}{dx^3}=0$. La IV.ª (1064) diverrà $m^3-6m^2+12m-8=0$, ossia $(m-2)^3=0$. Dunque $m=2$, e l' equazione ha tutte le radici eguali. Poichè frattanto $k=am+m^2=-8$, sostituiti nella V.ª i valori di m, k, a, b, u, avremo $y-\frac{4dy}{dx}+\frac{4d^2y}{dx^2}=Ce^{\frac{x}{2}}$, lineare del 2.° ordine. In questa per per determinare m avremo l'equazione (1063) $m^2-4m+4=0$, ossia $(m-2)^2=0$, onde $m=2$, e le due radici sono eguali. Dunque (*ivi*) $y-2p=u$, ossia $y-\frac{2dy}{dx}=$ (1063) $e^{\frac{x}{2}}(C'-\frac{1}{2}\int e^{-\frac{x}{2}}\times Ce^{\frac{x}{2}}dx)=e^{\frac{x}{2}}(C'-\frac{1}{2}Cx)$, lineare del primo ordine, nella quale $a=-2$, $X=e^{\frac{x}{2}}(C'-\frac{1}{2}Cx)$. Si avrà dunque (1062)

$$y=e^{\frac{x}{2}}\left(\int\frac{e^{\frac{x}{2}}(\frac{1}{2}Cx-C')dx}{2e^{\frac{x}{2}}}+C''\right)=e^{\frac{x}{2}}(\tfrac{1}{8}Cx^2-\tfrac{1}{2}C'x+C'').$$

III. Sia $y-\frac{5dy}{dx}+\frac{7d^2y}{dx^2}-\frac{3d^3y}{dx^3}=0$. Si avrà dunque $m^3-5m^2+7m-3=0$, equazione, le cui radici ineguali sono $m'=1$, $m''=3$. Sarà dunque $k'=-4$, $k''=-6$, $u'=C'e^x$, $u''=C''e^{\frac{x}{3}}$, e la V.ª si risolverà nelle due $y-4p+3q=u'$, $y-2p+q=u''$. Eliminando q, si trova $y-p=\frac{1}{2}(3u''-u')$, ossia $y-\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}(3C''e^{\frac{x}{3}}-C'e^x)$, lineare del primo ordine, nella quale avendosi $a=-1$, sarà $y=e^x\left(\int\frac{C'e^x-3C''e^{\frac{x}{3}}}{2e^x}dx+C\right)=e^x\left(\frac{C'x}{2}+\frac{9}{4}C''e^{-\frac{2x}{3}}+C\right)$

IV. Sia $y-\frac{4dy}{5dx}+\frac{d^2y}{5dx^2}=0$: avremo $m=\frac{2\pm\sqrt{-1}}{5}$, onde (1063) $g=\frac{2}{5}$, $h=\frac{1}{5}$, $t=2x$, $z=x$, $u'=Ce^{2x}(\cos x+\sqrt{-1}.\operatorname{sen} x)$, $u''=C'e^{2x}(\cos x-\sqrt{-1}.\operatorname{sen} x)$, ed $y=e^{2x}(C\cos x+C'\operatorname{sen} x)$.

V. Si debba sommare la serie infinita $y=1+\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^4}{1.2.3.4}+$ ec. Avremo $y-\frac{d^2y}{dx^2}=0$, e perciò $y=\frac{1}{2}(Ce^x+C'e^{-x})$. Per determinare le costanti si osservi che quando $x=0$, viene $y=\frac{1}{2}(C+C')=1$, $dy(=\frac{1}{2}(Ce^x dx-C'e^{-x}dx))=0=C-C'$; dunque $C=C'=1$, ed $y=\frac{e^x+e^{-x}}{2}=\frac{e^{2x}+1}{2e^x}$.

1066. Infine se la proposta $Adx+Bdy=0$ sia ribelle a tutti i metodi precedenti, ricorreremo al consueto compenso delle approssimazioni, ponendo $y=D+Ex+Fx^2+Gx^3+$ec. Questa differenziata darà $\frac{dy}{dx}=E+2Fx+3Gx^2+\text{ec.}=-\frac{A}{B}$; d'onde, sostituito in A, B il valor supposto di y, e il tutto mandato a zero (379), si avranno gli opportuni valori dei coefficienti. Per tal guisa dall'equazione di *Newton* $dy=dx-3xdx+ydx+x^2dx+xydx$ otterremo $y=D+(D+1)x+(D-1)x^2+\frac{2D+1}{3}x^3+$ec.

1067. Sia adesso l'equazione di primo ordine a tre varia-

bili $Pdx+Qdy+Rdz=o$. Poichè z è indipendente da x, y (911), consideriamola come costante per rapporto a queste variabili. L' equazione si ridurrà allora a $Pdx+Qdy=o$, il cui integrale completo conterrà una costante, che potrà esser funzione $\varphi(z)$ di z. Differenziato quest' integrale anche per z, risulterà un' equazione della forma $Pdx+Qdy+(S-T\varphi'(z))dz=o$, che paragonata colla proposta darà $S-T\varphi'(z)=R$, e $\varphi(z)=\int dz\varphi'(z)=\int\frac{(S-R)dz}{T}+C$, ove la quantità sotto il segno dovrà essere nulla, o semplicemente funzione di z, qualora sia integrabile la proposta. Che se l' integrazione di $Pdx+Qdy=o$ riescisse difficoltosa, si terrà quella di $Pdx+Rdz=o$, ovvero di $Qdy+Rdz=o$, eguagliando la costante a $\varphi(y)$ nella prima, a $\varphi(x)$ nella seconda. Così avendo $ydx(y+z)+zdy(x+z)+ydz(y-x)=o$, porremo $ydx(y+z)+zdy(x+z)=o$, e integrando, $l(x+z)-l(y+z)=\varphi(z)$. Di qui $zdy(x+z)+ydx(y+z)+ydz(y-x-(x+z)(y+z)\varphi'(z))=o$. Dunque $S-R=o$; per conseguenza $\varphi(z)=C$, e $y(x+z)=C(y+z)$ sarà l' integrale della data. Ma se sia proposta $zdx+xdy+ydz=o$, troveremo $S-R=xlx-y$, onde quest' equazione non è integrabile.

1068. Si terrà l' andamento stesso per l' equazione a quattro variabili $Pdx+Qdy+Rdz+Sd\omega=o$, integrando prima $Pdx+Qdy+Rdz=o$, come se fosse costante ω, e chiamando $\varphi(\omega)$ l' arbitraria dovuta a quest' integrale, che differenziato e paragonato in seguito con la proposta farà conoscere $\varphi(\omega)$. Ed egualmente si tratteranno l' equazioni a un più gran numero di variabili.

1069. Ma sia il primo membro della proposta un differenziale inesatto d' un ordine qualunque n, e voglia sapersi se mediante il consueto fattore M ammetta un integrale di un ordine immediatamente inferiore. Rappresentando con $V=o$ la data, se MV è differenziale esatto, fatto $dy=pdx$, $dp=qdx$, ec., $dz=p'dx$, $dp'=q'dx$, ec., dovrà aversi (1048) $\left(\frac{d(MV)}{dy}\right)-\frac{1}{dx}d\left(\frac{d(MV)}{dp}\right)+\frac{1}{dx^2}d^2\left(\frac{d(MV)}{dq}\right)-\text{ec.}=o$, $\left(\frac{d(MV)}{dz}\right)-\frac{1}{dx}d\left(\frac{d(MV)}{dp'}\right)+\frac{1}{dx^2}d^2\left(\frac{d(MV)}{dq'}\right)-\text{ec.}=o$, e quindi effettuando le differenziazioni del prodotto MV, ponendo per comodo $dV=Ldx+Ndy+Pdp+\text{ec.}+N'dz+P'dp+\text{ec.}$, e riflettendo che

$V=o$, porta seco $dV=o$, $d^2V=o$, ec., (957), si avranno le due equazioni $\left(N-\frac{dP}{dx}+\frac{d^2Q}{dx^2}-ec.\right)M-\left(P-\frac{2dQ}{dx}+ec.\right)\frac{dM}{dx}+\left(Q-\frac{3dR}{dx}+ec.\right)\frac{d^2M}{dx^2}-ec.=o$, $\left(N'-\frac{dP'}{dx}+\frac{d^2Q'}{dx^2}-ec.\right)M-\left(P'-\frac{2dQ'}{dx}+ec.\right)\frac{dM}{dx}+\left(Q'-\frac{3dR'}{dx}+ec.\right)\frac{d^2M}{dx^2}-ec.=o$. Da queste elimino $\frac{d^nM}{dx^n}$, differenzio l' equazione resultante, e dal differenziale, col mezzo di una delle precedenti, elimino egualmente $\frac{d^nM}{dx^n}$; di nuovo differenzio, e di nuovo elimino $\frac{d^nM}{dx^n}$, e così proseguo fino ad ottenere $n+1$ equazioni, dalle quali eliminata M ed ogni suo differenziale, otterrò un' equazione fra le sole variabili x, y, z, che dovrà sussistere nell' ipotesi che la proposta sia suscettibile d' integrazione, purchè vi si consideri $V=o$, $dV=o$, $d^2V=o$, ossia purchè in luogo di p, p', q, q', ec. si sostituiscano i loro valori presi da queste equazioni.

1070. Sia per esempio $(xdx+zdz)d^2y-zdyd^2z-dy(dx^2+dy^2+dz^2)=o$. Avremo $V=qx+p'qz-pq'z-p-p^3-pp'^2$, e quindi $N=o$, $P=-q'z-1-3p^2-p'^2$, $Q=x+p'z$; $N'=p'q-pq'$, $P'=qz-2pp'$, $Q'=-pz$. Sostituendo questi valori nelle equazioni di condizione, e quindi eliminando $\frac{d^2M}{dx^2}$, avremo $(6pp'q'+6p^2q+2pr'z-2rx-2p'rz)M+(3p+3p^3+3pp'^2+3pq'z-3qx-3p'qz)\frac{dM}{dx}=o$; e siccome ponendo i valori di q', r' cavati da $V=o$, $dV=o$, il primo membro si annulla, l' equazione sussiste, e perciò senza proseguire ulteriormente l' eliminazione di M, può concludersi che la proposta é integrabile.

Sia $z(1+y)dx^2+y^2dxdy+yzdxdz+xdy^2-xdz^2+xyd^2y+xzd^2z=o$. Operando come sopra giungeremo alle due equazioni $(x+p'z)M-(y^2-2y)\frac{dM}{dx}+xy\frac{d^2M}{dx^2}=o$, $pM+(y-2)\frac{dM}{dx}-x\frac{d^2M}{dx^2}=o$. Eliminando $\frac{d^2M}{dx^2}$, si ha $(x+p'z+py)M=o$; perciò $x+p'z+py=o$, ed $x=-p'z-py$, valore che soddisfà alla proposta, la quale può per conseguenza integrarsi, ed ha anzi per integrale, non per altro completo (946), la stessa equazione $x+p'z+py=o$.

1071. Con tutto ciò restando quasi sempre difficilissima e spesso impossibile la determinazione di M, la teoria di questo genere d'equazioni è pur troppo imperfetta finora. Ponghiamo alcuni pochi casi, nei quali, supposte due variabili sole, e usando qualche artifizio, riesce integrare.

I. $\frac{y^2dx-xydy}{\sqrt{(y^2dx^2-2xydxdy+y^2dy^2)}}=Y$: fatto $\frac{x}{y}=z$; onde $x=yz$ e $dx=ydz+zdy$, si ha $\frac{y^2dz}{\sqrt{(y^2dz^2-z^2dy^2+dy^2)}}=Y$; quadrando, riducendo allo stesso denominatore, e separando, viene $\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)}}=\frac{Ydy}{\sqrt{(y^4-Y^2y^2)}}$.

II. $dy^{m-2}d^2y=Ydx^m$, ove è costante dx: fatto $dy=zdx$, viene $z^{m-1}dz=Ydy$.

III. $Ydx^2-mdy^2-nyddy=0$, ove dx è costante: fatto $dx=zdy\sqrt[n]{y^m}$, onde $0=(dydz+zd^2y)\sqrt[n]{y^m}+\frac{mzdy^2}{n}\sqrt[n]{y^{m-n}}$, cioé $nyddy=-mdy^2-\frac{nydydz}{z}$, viene $Ydy\sqrt[n]{y^{2m-n}}=-\frac{ndz}{z^3}$, e $dx=dy\sqrt[n]{y^m}\sqrt{\frac{n}{2(\int Ydy\sqrt[n]{y^{2m-n}}+C)}}$.

IV. Se sia $\phi(x,\frac{dy}{dx},\frac{d^2y}{dx^2})=0$, fatto $\frac{dy}{dx}=p$, e perciò $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dp}{dx}$, sarà $\frac{dp}{dx}=f(x,p)$, equazione di primo ordine, che integrata ne darà una dello stesso ordine fra x e p, cioé tra x e $\frac{dy}{dx}$, che pure integrata farà conoscere y. Sia per esempio $\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}=\frac{d^2y}{dx^2}X$: si troverà $\frac{dp}{dx}=\frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{X}$, e per il primo integrale $\frac{p}{\sqrt{(1+p^2)}}=\int\frac{dx}{X}+C$. Fatto $\int\frac{dx}{X}+C=V$, si avrà per l'integrale secondo $y=\int\frac{Vdx}{\sqrt{(1-V^2)}}+C'$; onde, se $X=\frac{a}{2x}$, sarà $y=\int\frac{(x^2+C)dx}{\sqrt{(a^2-(x^2+C)^2)}}+C'$. Nel modo stesso si tratterà $\phi\left(y,\frac{dy}{dx},\frac{d^2y}{dx^2}\right)=0$, eguagliando p a $\frac{dx}{dy}$.

V. L' equazioni di secondo ordine, omogenee rapporto ad x, y ed ai differenziali dx, dy, d^2y valutati per una dimensione possono sempre ridursi al primo con le sostituzioni $y = ux$ e $qx = z$, che atteso $dy = pdx$ e $dp = qdx = \frac{zdx}{x}$, danno $\frac{dx}{x}=\frac{du}{p-u}=\frac{dp}{z}$: così $aydx^2-bxdxdy+gy^2d^2y=0$ diventa $au-bp+gu^2qx=0=au-bp+gu^2z$, onde $z=\frac{bp-au}{gu^2}$, $\frac{du}{p-u}=\frac{gu^2dp}{bp-au}$ e $dp=\frac{(bp-au)du}{(p-u)gu^2}$, equazione del prim' ordine, che se possa separarsi (come nel caso di $a=b$), separerà anche l'altra $\frac{dx}{x}=\frac{du}{p-u}$. Anzi tali equazioni si ridurranno, sol che sieno omogenee riguardo ad y, dy, d^2y, qual' è $yd^2y-dy^2-Xydxdy=0$; poichè fatto $p=\frac{dy}{dx}=uy$, $q=\frac{dp}{dx}=yz$, onde $dy=uydx$, $dp=yzdx=udy+ydu$, $\frac{dy}{y}=udx=\frac{zdx-du}{u}$, ella diventa $qydx^2-p^2dx^2-Xypdx^2=0=z-u^2-uX$, che dà $u^2dx=(u^2+uX)dx-du$, onde $\frac{du}{u}=Xdx$, equazione separata, che separa anche $\frac{dy}{y}=udx$.

VI. Se sia $p=\frac{dy}{dx}$, $q=\frac{dp}{dx}=\frac{d^2y}{dx^2}$, $r=\frac{dq}{dx}=\frac{d^3y}{dx^3}$, $s=\frac{dr}{dx}=\frac{d^4y}{dx^4}$ ec., verrà I. $x=\int\frac{dy}{p}$; II. $x=\int\frac{dp}{q}$, ed $y=\int pdx=\int\frac{pdp}{q}$; III. $x=\int\frac{dq}{r}$ ed $y=\int pdx=\int dx\int qdx=\int\frac{dq}{r}\int\frac{qdq}{r}$; IV. $x=\int\frac{dr}{s}$ ed $y=\int pdx=\int dx\int qdx=\int dx\int dx\int rdx=\int\frac{dr}{s}\int\frac{dr}{s}\int\frac{rdr}{s}$ ec., formule integrabili, se p sia funzione di y, q di p, r di q, s di r, ec. Così per l'equazione $1=\frac{d^2y}{dx^2}\cdot\frac{d^3y}{dx^3}$, cioè $1=qr$ o $r=\frac{1}{q}$, la III. dà $x=\int qdq=\frac{1}{2}q^2+C$, $\int q^2dq=\frac{1}{3}q^3+C'$ ed $y=\frac{1}{3.5}q^5+\frac{1}{2}C'q^2+C''=\frac{(2x-2C)^{\frac{5}{2}}}{3.5}+\frac{C'(2x-2C)}{2}+C''$.

Riprese anche le formule $\frac{dy}{dx}=p$, $\frac{dp}{dx}=q$, $\frac{dq}{dx}=r$, ec., verrà

I. $\frac{dpdy}{dx}=pdp=qdy$, $\frac{1}{2}p^2=\int qdy$, $p=\frac{dy}{dx}=\sqrt{2\int qdy}$, ed $x=\int\frac{dy}{\sqrt{2\int qdy}}$; II. $\frac{dqdp}{dx}=qdq=rdp$, $\frac{1}{2}q^2=\int rdp$, $q=\frac{dp}{dx}=\sqrt{2\int rdp}$, $x=\int\frac{dp}{\sqrt{2\int rdp}}$, e come sopra, $y=\int\frac{pdp}{q}=\int\frac{pdp}{\sqrt{2\int rdp}}$; III. $\frac{drdq}{dx}=rdr=sdq$, $\frac{1}{2}r^2=\int sdq$, $r=\frac{dq}{dx}=\sqrt{2\int sdq}$, $x=\int\frac{dq}{\sqrt{2\int sdq}}$ e come sopra, $y=\int\frac{dq}{r}\int\frac{qdq}{r}=\int\frac{dq}{\sqrt{2\int rdq}}\int\frac{qdq}{\sqrt{2\int sdq}}$, ec., formule integrabili, se q sia funzione di y, r di p, s di q, ec. Così per l' equazione $\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{dy}{dx}$, cioè $r=p$ e $\int rdp=\frac{1}{2}p^2+C$, la II. dà $x=\int\frac{dp}{\sqrt{(p^2+2C)}}=$ (1027) $l(p+\sqrt{(p^2+2C)})-lC'=xle$,

$$C'e^x-p=\sqrt{(p^2+2C)},\ p=\frac{C'e^x}{2}-\frac{Ce^{-x}}{C'},\ \text{ed}\ y=\int\frac{pdp}{\sqrt{(p^2+2C)}}=$$

$$\sqrt{(p^2+2C)}+C''=\frac{C'e^x}{2}+\frac{Ce^{-x}}{C'}+C''=Ce^x+C'e^{-x}+C'',$$ preso il valore di p e mutate le costanti $\frac{C'}{2}$ in C, e $\frac{C}{C'}$ in C'.

VII. Infine se l' ordine della data sia n, e si abbiano n equazioni non identiche d' ordine inferiore, eliminando i differenziali, come altrove si eliminò le costanti (959), avremo un' equazione tra le variabili x ed y, che sarà l' integrale finito della proposta. Si è di già praticato questo naturalissimo metodo integrando le lineari (1065). È poi da osservarsi, che qualunque equazione dell' ordine n ha sempre un numero n d' integrali primi dell' ordine n. Infatti potendosi da un' equazione finita dedurne $n-1$ differenziali dell' ordine $n-1$ tutte diverse fra loro per una qualche costante (960); se col mezzo delle respettive differenziali si elimini da ciascuna questa costante, svanirà ogni divario, e risulterà da tutte un' equa-

zione medesima dell' ordine n che avrà dunque per integrale immediato ciascuna delle suddette equazioni. Così dall' equazione $y - ax - bx^2 = 0$; differenziata ed eliminatane prima a poi b, provengono le due altre $y - \frac{xdy}{dx} + bx^2 = 0$, $2y - \frac{xdy}{dx} - ax = 0$, dalle quali differenziate e spogliate delle loro costanti deriva l' unica $2y - \frac{2xdy}{dx} + \frac{x^2d^2y}{dx^2} = 0$, che in conseguenza ha l' una e l' altra di esse per integrale.

1072. Del rimanente i soliti metodi di approssimazione sono di non piccolo soccorso anche nell'equazioni d' ordine superiore. Con questi *Eulero* integrò l' equazione $\frac{d^2y}{dx^2} + ax^my = 0$, da cui dipende l' altra più generale $\frac{d^2y}{dx^2} + P\frac{dy}{dx} + Qy = 0$ coi coefficienti P, Q variabili. Ma la brevità tanto necessaria in questi elementi non ci dà luogo a diffonderci in tali ricerche. Si consulti il calcolo differenziale ed integrale dello stesso *Eulero* o gli eccellenti corsi dei chiarissimi *Paoli* e *Brunacci*, ove accuratamente e con ottima scelta è riportato quanto di più interessante si trova sparso in quell' opera sì rapporto a queste dottrine, che alla maggior parte delle trascorse.

Integrazione dell' equazioni a differenze parziali.

1073. Abbiamo già trovato (959) come l' equazioni a differenze parziali si formino. Vedremo adesso come possano integrarsi, o per qual mezzo si giunga a stabilire il rapporto finito delle variabili, che vi son contenute: ma prima è necessario esporre alcuni precetti in seguito a quanto si è detto altrove (963. 1067) sulla teoria delle costanti e delle funzioni arbitrarie.

1.° Qualunque equazione differenziale può generalmente supporsi dedotta dalla combinazione d' un' equazione finita con le sue differenziali, mediante la quale sia rimasta eliminata la maggior quantità possibile o di costanti, o di funzioni arbitrarie o dell' une insieme e dell' altre.

2.° Perciò l' integrale completo e finito dell' equazione dif-

ferenziale d' un ordine n e con m variabili dovrà contenere o un numero (960. 1.°) $N=m\left(\frac{m+1}{2}\right)\left(\frac{m+2}{3}\right)..\left(\frac{m+n-1}{n}\right)-1$ di costanti che non si trovino nella data, o un numero $N'=\frac{N}{nr+1}$ di funzioni arbitrarie, essendo manifesto rapporto a quest' ultime, che come ciascuna di esse introduce a parte nel sistema dell' equazioni $nr+1$ quantità da eliminarsi (963), così se in tutte sieno N', prese insieme ne introduranno $N'nr+N'$; numero, che dovendo essere minore almeno d' un' unità di quello delle equazioni (963) espresso da $N+1$ (960), rende appunto $N'=\frac{N}{nr+1}$. Se $n=1$, il numero delle quantità da eliminarsi potrà eguagliare quello delle equazioni (*ivi*), ed avremo $N'=\frac{N+1}{r+2}$. Così con $m=4$, ed $r=2$, avremo $N'=1$, cioè l' aggiunta di una sola funzione della forma $\phi(p,q)$ completerà l' integrale.

3.° Se N' risulterà frazionaria, l' integrale sarà soltanto capace di quel numero di funzioni, che verrà espresso dagl' interi della frazione: ma dovrà di più contenere tante costanti, quante se ne possono eliminare con un numero d' equazioni eguale al resto della divisione.

4.° Le costanti dovranno essere realmente distinte l' une dall' altre, e sparse nell' equazione in modo che non possa diminuirsene il numero con veruna nuova indeterminata atta a rappresentare due o più di esse in comune. Quanto poi alle funzioni non solo deve trovarsi diversità tra di loro, ma ancora tra le respettive quantità sotto il segno: poiché se queste fossero eguali, si vedrà facilmente (operando per esempio sull' equazione $F(x, y, z, \phi(p), f(p))=0$), che un minor numero d' equazioni basta per eliminar tali funzioni dall' integrale, e perciò si esigerà un maggior numero di queste ultime per completarlo.

1074. Cominciando dal caso più semplice, sia l' equazione del primo ordine e lineare $\left(\frac{dz}{dx}\right)+M\left(\frac{dz}{dy}\right)-N=0$, ove M, N son funzioni di x, y, z; e $F(x, y, z)=0$ ne sia il richiesto integrale. Dunque $z=\phi(x, y)$, $dz=\left(\frac{dz}{dx}\right)dx+\left(\frac{dz}{dy}\right)dy$ (942), e

$\left(\frac{dz}{dx}\right)+\left(\frac{dz}{dy}\right)\frac{dy}{dx}-\frac{dz}{dx}=0$, equazione, che confrontata con la proposta, dà $M=\frac{dy}{dx}$, $N=\frac{dz}{dx}$, ossia $Mdx-dy=0$, $Ndx-dz=0$. Si suppongano $P=a$, $Q=b$ gl' integrali completi di queste due nuove equazioni, a, b essendo le opportune costanti arbitrarie. Potremo dunque dedurne i valori di x, y dati per z, a, b, che sostituiti nell' integrale $F(x, y, z)=0$, lo cambieranno in funzione delle costanti a, b e della sola variabile z. Ma allora z risulterebbe costante (910): dunque dopo la sostituzione non resterà in $F(x, y, z)$ neppur la variabile z, che dovrà svanir da se stessa: onde l' integrale cercato sarà funzione delle sole variabili a, b o dei loro valori P, Q, e potrà rappresentarsi con $F(P, Q)=0$, o con $Q=\Phi(P)$.

Esemp. Debba integrarsi $\left(\frac{dz}{dx}\right)+\frac{y}{x}\left(\frac{dz}{dy}\right)+\frac{z}{y}-g\sqrt{(x^2+y^2)}=0$. Avremo $M=\frac{y}{x}$, $N=-\frac{z}{y}+g\sqrt{(x^2+y^2)}$; e in conseguenza $\frac{ydx}{x}-dy=0$, $-\frac{zdx}{y}+g\sqrt{(x^2+y^2)}dx-dz=0$. La prima integrata dà $\frac{x}{y}=a=P$. La seconda divien dunque $-azdx+\frac{gx^2dx}{a}\sqrt{(1+a^2)}-xdz=0$, che integrata dà (1058. VI) $z=\frac{gx^2\sqrt{(1+a^2)}}{a(a+2)}+b=\frac{gxy\sqrt{(x^2+y^2)}}{x+2y}+b$, e $b=Q=z-\frac{gxy\sqrt{(x^2+y^2)}}{x+2y}=\Phi(P)=\Phi\left(\frac{x}{y}\right)$.

Si voglia integrare $\left(\frac{dz}{dx}\right)+\frac{my}{nx}\left(\frac{dz}{dy}\right)-\frac{mz}{x}=0$. Sarà $M=\frac{my}{nx}$, $N=\frac{mz}{x}$; onde $\frac{my}{nx}-\frac{dy}{dx}=0$, $\frac{mz}{x}-\frac{dz}{dx}=0$. La prima si riduce ad $\frac{mdx}{nx}=\frac{dy}{y}$, d' onde si ha $ly-lx^{\frac{m}{n}}=la$, ossia $y=ax^{\frac{m}{n}}$; e la seconda ad $\frac{mdx}{x}-\frac{dz}{z}=0$, che rende $lx^m-lz=lb$, ovvero $x^m=bz$: dunque $a=P=y.x^{-\frac{m}{n}}$, e $b=Q=x^m z^{-1}=\Phi(P)=\Phi\left(\frac{y}{x^{\frac{m}{n}}}\right)$.

1075. Se M=o e sia $\left(\frac{dz}{dx}\right)$=N, l' equazione $Mdx-dy=o$ darà $y=a=Cost$. Perciò nell' altra equazione $Ndx-dz=o$ dovrà supporsi costante y : onde esprimendo con $\int^x Ndx$ l' integrale parziale per x di Ndx, avremo $Q=b=z-\int^x Ndx$, e poichè $P=y$, sarà $z=\int^x Ndx+\varphi y$. *Cioè l' equazione* $\left(\frac{dz}{dx}\right)=N$ *ove N è funzione di x, y, z s' integra come se fosse a differenze ordinarie, purchè vi si riguardi y come costante, e in luogo della costante consueta si aggiunga la funzione indeterminata* $\varphi(y)$.

1076. Con la stessa facilità s' integra l' equazione a quattro variabili $\left(\frac{dz}{dx}\right)+L\left(\frac{dz}{dy}\right)+M\left(\frac{dz}{du}\right)=N$. Poichè suppostane l' integrale $F(x, y, z, u)=o$, e quindi $z=\varphi(x, y, u)$, $dz=\left(\frac{dz}{dx}\right)dx+\left(\frac{dz}{dy}\right)dy+\left(\frac{dz}{du}\right)du$, $\frac{dz}{dx}=\left(\frac{dz}{dx}\right)+\left(\frac{dz}{dy}\right)\frac{dy}{dx}+\left(\frac{dz}{du}\right)\frac{du}{dx}$ il confronto di questa con la data darà $L=\frac{dy}{dx}$, $M=\frac{du}{dx}$, $N=\frac{dz}{dx}$. Supposti $P=a$, $Q=b$, $R=c$ gl' integrali di queste equazioni o di altre che ne dipendono, potran dedursene i valori di x, y, u dati per z, a, b, c, che sostituiti in $F(x, y, z, u)=o$, per la ragione stessa data già sopra, faranno svanire anche z e daranno per l' integrale richiesto $F(a, b, c)=F(P, Q, R)=o$, ossia $R=\varphi(P, Q)$. completo, perchè contiene secondo il precetto (1073.2.°) una funzione di due quantità.

Es. Sia $(2z-2y)\left(\frac{dz}{dx}\right)-\left(\frac{dz}{dy}\right)-(x+2z^2-2yz)\left(\frac{dz}{du}\right)-1=o$.

Dunque $L=-\frac{1}{2z-2y}$, $M=-\frac{x+2z^2-2yz}{2z-2y}$, $N=\frac{1}{2z-2y}$. Sarà in conseguenza $(2z-2y)dy+dx=o$, $(2z-2y)du+(x+2z^2-2yz)dx=o$, $(2z-2y)dz-dx=o$; d' onde $dz+dy=o$, $2zdz+2ydy-dx=o$; $du+xdz+zdx=o$. Dunque $P=z+y$, $Q=z^2+y^2-x$, $R=u+xz$, e per l' integrale cercato $u+xz=\varphi(z+y, z^2+y^2-x)$.

1077. Più complicato è il metodo se l' equazione non sia lineare. Supponendola tra le tre sole variabili x, y, z, e fatto

$\left(\frac{dz}{dx}\right)=p$, $\left(\frac{dz}{dy}\right)=q$, potremo rappresentarla generalmente con $F(x, y, z, p, q)=0$, e sarà al solito $z=\Phi(x, y)$, e quindi 1.ª $dz-p\,dx-q\,dy=0$, che dovendo esser supposta integrabile darà luogo alla 2.ª $\left(\frac{dq}{dx}\right)-\left(\frac{dp}{dy}\right)+p\left(\frac{dq}{dz}\right)-q\left(\frac{dp}{dz}\right)=0$ (1050). Ponghiamo adesso che dalla proposta differenziata si abbia $dq=A\,dp+B\,dx+C\,dy+D\,dz$; poichè p è funzione di x, z, sarà $\left(\frac{dq}{dx}\right)=A\left(\frac{dp}{dx}\right)+B$, $\left(\frac{dq}{dz}\right)=A\left(\frac{dp}{dz}\right)+D$, e sostituendo nella seconda, $A\left(\frac{dp}{dx}\right)-\left(\frac{dp}{dy}\right)+(pA-q)\left(\frac{dp}{dz}\right)+B+pD=0$, equazione lineare per rapporto alle variabili p, x, y, z. Il di lei integrale concluso col dato metodo (1076) sia $R=\Phi(P, Q)$. Prendendone il valore di p e dalla data quello di q, e ambedue sostituendoli nella 1.ª; e quindi integrando, si avrebbe il valor di z per x, y e $\Phi(P, Q)$, che sarebbe l' integrale cercato. Ma l'integrale di un' equazione a differenze parziali del primo ordine a tre variabili non può contenere una funzione composta di due quantità indipendenti (1073. 2.°); dunque deve necessariamente essere $P=\Psi(Q)$ e potrà perciò supporsi $R=\Phi(Q)$, cioè funzione di Q solamente. Frattanto da queste due equazioni eliminando p, avremo senza bisogno di altro processo il valor di z dato per x, y, che sarà l'integrale cercato.

1078. Passando all' equazioni di secondo ordine, sia da integrarsi I.ª $\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)+g\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)+h\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)=R$, ove g ed h sono costanti ed R è funzione di x, y. Pongo II.ª $\left(\frac{dz}{dx}\right)+m\left(\frac{dz}{dy}\right)=V$ (m è indeterminata), e differenziandola prima per x, poi per y, moltiplicando le differenziali respettive per $\frac{1}{dx}$, $\frac{h}{mdy}$, e sostituendo nella I.ª i valori di $\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)$ e di $h\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)$, ella (se si faccia III.ª $g-m-\frac{h}{m}=0$) diverrebbe IV.ª $\left(\frac{dV}{dx}\right)+\frac{h}{m}\left(\frac{dV}{dy}\right)=R$,

Ma qui bisogna osservare, che la III.ª dà due valori m', m'' di m, e che $m'm''=h$; cangiato dunque m in m' nella II.ª e IV.ª, avremo le due equazioni di primo ordine $\left(\frac{dz}{dx}\right)+m'\left(\frac{dz}{dy}\right)=V$, $\left(\frac{dV}{dx}\right)+m''\left(\frac{dV}{dy}\right)=R$, che daran luogo ai due sistemi d' equazione a differenze ordinarie (1074) 1.° $m'dx-dy=0$, $Vdx-dz=0$; 2.° $m''dx-dy=0$, $Rdx-dV=0$. Dall' ultimo abbiamo $y-m''x=a$, $V-\int Rdx=b$; onde (*ivi*) $V=\int Rdx+\Phi(y-m''x)$, purché in R si ponga $y=a+m''x$, il che cangerà R in funzione della sola x. Il primo darà $y-m'x=a'$, $z-\int Vdx=b'$ e $z=\int Vdx+f(y-m'x)$, purché in V si ponga $y=a'+m'x$. Sostituendo dunque il valor di V, e osservando, che $\int dx\Phi(y-m''x)=\int dx\Phi(a'+m'x-m''x)='\Phi(a'+m'x-m''x)='\Phi(y-m''x)$, cangiate $'\Phi$ in Φ, avremo $z=\int dx\int Rdx+\Phi(y-m''x)+f(y-m'x)$, purché nella prima integrazione ponghiamo $y=a+m''x$, e nella prima integrazione ponghiamo $y=a+m''x$, e nella seconda $y=a'm'x$. Che se $m'=m''$, sarà $\int dx\Phi(y-m''x)=\int dx\Phi(a'+m'x-m''x)=\int dx\Phi a'=x\Phi a'=x\Phi(y-m'x)$, e $z=\int dx\int Rdx+x\Phi(y-m'x)+f(y-m'x)$.

1079. Sia adesso $\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)+A\left(\frac{dz}{dx}\right)+B\left(\frac{dz}{dy}\right)+Cz+V=0$.

coi coefficienti A, B, C, V funzioni di x, y. Suppongo $z=e^{\alpha}\beta$, e che α, β sieno funzioni di x, y, determinate dalle due condizioni 1.ª $\left(\frac{d\alpha}{dx}\right)+B=0$, 2.ª $\left(\frac{d^2\beta}{dxdy}\right)+\left(\left(\frac{d\alpha}{dy}\right)+A\right)\left(\frac{d\beta}{dx}\right)=-Ve^{-\alpha}$, oppure dalle due altre 3.ª $\left(\frac{d\alpha}{dy}\right)+A=0$, 4.ª $\left(\frac{d^2\beta}{dxdy}\right)+\left(\left(\frac{d\alpha}{dx}\right)+B\right)\left(\frac{d\beta}{dy}\right)=-Ve^{-\alpha}$. Introdotto nella data il valor supposto di z e in luogo di $\left(\frac{d^2\alpha}{dxdy}\right)$ l' uno o l' altro dei due valori $-\left(\frac{dB}{dy}\right)$, $-\left(\frac{dA}{dx}\right)$ dati o dalla 1.ª o dalla 3.ª condizione troveremo nel primo caso $C=AB+\left(\frac{dB}{dy}\right)$, e nel secondo $C=$

$AB+\left(\frac{dA}{dx}\right)$. Onde se tra i coefficienti A, B, C della proposta sussista uno di questi rapporti, ella sarà integrabile, ed avremo $z=e^{\alpha}\beta$, ove se avrà avuto luogo il primo dei due rapporti dovremo fare $\alpha=-\int^x B dx+\Phi(y)$ valore dato dalla prima condizione (1075); se il secondo, dovremo porre $\alpha=-\int^y A dy+\Phi(x)$ dato dalla 3.ª; quanto poi a β si avrà o dalla 2.ª o dalla 4.ª condizione, ponendo nella 2.ª $\left(\frac{d\beta}{dx}\right)=u$, nella 4.ª $\left(\frac{d\beta}{dy}\right)=u'$, con che la 2.ª diverrà $\left(\frac{du}{dy}\right)+\left(\left(\frac{d\alpha}{dy}\right)+A\right)u=-Ve^{-\alpha}$ e sarà (1075) $\beta=\int^x u dx+f(y)$, e dalla 4.ª avremo $\left(\frac{du'}{dx}\right)+\left(\left(\frac{d\alpha}{dx}\right)+B\right)u'=-Ve^{-\alpha}$ e $\beta=\int^y u'dy+f(x)$.

Es. Abbiasi $\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)-\frac{1}{x-y}\left(\frac{dz}{dx}\right)-\frac{1}{x-y}\left(\frac{dz}{dy}\right)+\frac{2z}{(x-y)^2}=0$; ove si verifica il secondo dei due rapporti fra i coefficienti. Dunque poichè $A=B=-\frac{1}{x-y}$ e $V=0$, avremo dalla condizione 3.ª $\alpha=\int^y\frac{dy}{x-y}+\Phi(x)=-l(x-y)+l\Phi(x)=l\frac{\Phi(x)}{x-y}$. In conseguenza $\left(\frac{d\alpha}{dx}\right)=\frac{\Phi'(x)}{\Phi(x)}-\frac{1}{x-y}$, e $\left(\frac{du'}{dx}\right)+\left(\frac{\Phi'(x)}{\Phi(x)}-\frac{2}{x-y}\right)u'=0$. Questa integrata (1075) dà $lu'=2l(x-y)-l\Phi(x)+lF(y)$, cioè $u'=\frac{(x-y)^2F(y)}{\Phi(x)}$. Dunque $\beta=\int^y\frac{dy(x-y)^2F(y)}{\Phi(x)}+f(x)=$ (947) $\frac{1}{\Phi(x)}\left(\int^y dy(x-y)^2F(y)+f(x)\right)$ e $z=\frac{1}{x-y}\left(\int^y dy(x-y)^2F(y)+f(x)\right)$. Se si fa $F(y)=0$, avremo l'integrale particolare $z=\frac{f(x)}{x-y}$.

1080. Quando non sussista alcuno dei due rapporti, si riduca la data alla forma $\left(\frac{d\left(\left(\frac{dz}{dy}\right)+Az\right)}{dx}\right)+B\left(\left(\frac{dz}{dy}\right)+Az\right)-$

$\left(C-\left(\frac{dA}{dx}\right)-AB\right)z+V=o$, che fatto $\left(\frac{dz}{dy}\right)+Az=z'$ e $C-\left(\frac{dA}{dx}\right)-AB=M$, diviene $\frac{1}{M}\left(\frac{dz'}{dx}\right)+\frac{B}{M}z'+z+\frac{V}{M}=o$. Da questa, differenziata per y, e sommata col suo prodotto per A, resulta una nuova equazione della forma $\left(\frac{d^2z'}{dxdy}\right)+A'\left(\frac{dz'}{dx}\right)+B'\left(\frac{dz'}{dy}\right)+C'z'+V'=o$ simile alla proposta, e di cui si tenterà coll'istesso metodo l' integrazione, la quale, se riesca, farà conoscere z', e per conseguenza anche z. Se poi non possa effettuarsi l' integrazione, la trasformeremo alla maniera medesima in una terza, e così di seguito, finchè non si giunga a qualche equazione, che resista agli stabiliti criterj d' integrabilità, la quale, come ha dimostrato il Sig. *La Place*, deve necessariamente incontrarsi, qualora la proposta sia integrabile.

1081. Ma sia $A=B=C=V=o$, cioè non resti nella proposta (1079) che il solo termine $\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)$. Sarà dunque $\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)=o$, e posto 1.ª $\left(\frac{dz}{dy}\right)=v$, si avrà 2.ª $\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)=\left(\frac{dv}{dx}\right)=o$. Nella 2.ª $N=o$ (1075): dunque integrando si avrà $v=\Phi(y)$. Nella 1.ª $N=v$, dunque $z=\int^y vdy+f(x)=\int^y dy\Phi(y)+f(x)$. Facendo perciò $\int^y dy\Phi(y)=F(y)$, avremo infine $z=F(y)+f(x)$.

1082. Frattanto basta che si sappiano integrare l'equazioni precedenti, perchè lo stesso possa farsi dell' altra più generale $\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)+M\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)+N\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)+L\left(\frac{dz}{dx}\right)+P\left(\frac{dz}{dy}\right)+Qz+T=o$. Infatti se ω, θ sieno due funzioni di x, y tali, che si abbia 1.ª $\left(\frac{d\omega}{dx}\right)^2+M\left(\frac{d\omega}{dx}\right)\left(\frac{d\omega}{dy}\right)+N\left(\frac{d\omega}{dy}\right)^2=o$, 2.ª $\left(\frac{d\theta}{dx}\right)^2+M\times\left(\frac{d\theta}{dx}\right)\left(\frac{d\theta}{dy}\right)+N\left(\frac{d\theta}{dy}\right)^2=o$, e si calcolino e s'introducano nella data i valori dei coefficienti differenziali $\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)$, $\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)$, $\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)$, ec.

dati per le nuove variabili (953), avremo $M'\left(\frac{d^2z}{d\omega d\theta}\right)+L'\left(\frac{dz}{d\omega}\right)+$ $P'\left(\frac{dz}{d\theta}\right)+Qz+T=o$, ove $M'=2\left(\frac{d\omega}{dx}\right)\left(\frac{d\theta}{dx}\right)+M\left(\left(\frac{d\omega}{dx}\right)\left(\frac{d\theta}{dy}\right)+\left(\frac{d\theta}{dx}\right)\left(\frac{d\omega}{dy}\right)\right)+2N\left(\frac{d\omega}{dy}\right)\left(\frac{d\theta}{dy}\right)$, ed L', P' eguagliano il primo membro della data toltone $Qz+T$, e cangiata z in ω per L', in θ per P'; ed é chiaro, che per render questa nuova equazione simile alla precedente (1079), basterà dividerla per M', e introdurre nei coefficienti i valori di x, y, dati per ω, θ, dei quali potranno aversene un' infinità dalle equazioni $\left(\frac{d\omega}{dx}\right)=\left(\frac{d\omega}{dy}\right)\left(-\frac{1}{2}M+\sqrt{(\frac{1}{4}M^2-N)}\right)$, $\left(\frac{d\theta}{dx}\right)=\left(\frac{d\theta}{dy}\right)\left(-\frac{1}{2}M-\sqrt{(\frac{1}{4}M^2-N)}\right)$ dedotte dalle due condizioni 1.ª e 2.ª

Esemp. Sia $\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)+y^2\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)+y\left(\frac{dz}{dy}\right)=o$. Sarà $M=o$, $N=y^2$, $P=y$, $Q=o$, $T=o$: onde primieramente $\left(\frac{d\omega}{dx}\right)=y\left(\frac{d\omega}{dy}\right)\sqrt{-1}$, $\left(\frac{d\theta}{dx}\right)=-y\left(\frac{d\theta}{dy}\right)\sqrt{-1}$, e perciò (1074) $\omega=\phi(x\sqrt{-1}+ly)$, $\theta=f(x\sqrt{-1}-ly)$. Scelte le più semplici forme di queste funzioni porremo $\omega=x\sqrt{-1}+ly$, $\theta=x\sqrt{-1}-ly$; quindi $\left(\frac{d\omega}{dx}\right)=\sqrt{-1}=\left(\frac{d\theta}{dx}\right)$; $\left(\frac{d\omega}{dy}\right)=\frac{1}{y}=-\left(\frac{d\theta}{dy}\right)$, $\left(\frac{d^2\omega}{dx^2}\right)=o=\left(\frac{d^2\theta}{dx^2}\right)$, $\left(\frac{d^2\omega}{dy^2}\right)=-\frac{1}{y^2}=-\left(\frac{d^2\theta}{dy^2}\right)$, onde $M'=-4$, $L'=P'=o$, e la trasformata diviene $\left(\frac{d^2z}{d\omega d\theta}\right)=o$, che immediatamente dà (1081) $z=\phi(\omega)+f(\theta)=\phi(x\sqrt{-1}+ly)+f(x\sqrt{-1}-ly)=$ (658) $\phi(l(y\cos x+y\sqrt{-1}.\mathrm{sen}\,x))+f(l(y\cos x-y\sqrt{-1}.\mathrm{sen}\,x))$.

1083. Sia $\varphi=\varphi(x,y,a)=0$ un' equazione finita tra x,y,a: è chiaro che se si differenzi avremo un medesimo risultato o vi si riguardi a come costante o vi si tratti come variabile, purchè in questo secondo caso si prendano in fine per nulli i termini introdotti dalla supposta variabilità di essa costante, cioè si ponga $\left(\frac{d\varphi}{da}\right)da=0$, o più semplicemente $\left(\frac{d\varphi}{da}\right)=0$.

1084. Nasce di qui che qualora si abbia un' equazione differenziale di primo ordine a due variabili, di cui $\varphi=\varphi(x,y,a)=0$ sia l' integrale completo (1075, 2.°), non solo potremo assegnare ad a qualunque valor costante ci piaccia, senza che per questo cessi la verità dell' integrale, ma quelli ancora, che risulteranno dall' equazione $\left(\frac{d\varphi}{da}\right)=0$, che generalmente verranno espressi in funzioni delle variabili x, y. L' integrale oltre al perdere in questo caso la sua qualità di completo (946), neppur caderà tra gl' infiniti integrali particolari, che si hanno dall' eguagliare a ad una qualunque costante (*ivi*); onde ha preso il nome di *soluzione particolare*. Abbiasi per esempio $\sqrt{(x^2+y^2)}\frac{dy}{dx}-\frac{ydy}{dx}-x=0$, il cui integrale completo, fatto $x^2+y^2=z^2$, si trova esser $\varphi=z^2-2ay-a^2=0$. Dunque $\left(\frac{d\varphi}{da}\right)=-2a-2y=0$, e quindi $a=-y$, valore che posto in φ, dà la soluzione particolare $x^2+y^2=0$, che, senza esser compresa sotto l' integrale completo, soddisfà interamente alla data.

1085. Se l' equazione differenziale sia di second' ordine, ed abbia in conseguenza $\varphi(x,y,a,b)=0$ per integrale completo, potrebbe per avventura supporsi che per dedurne la soluzione particolare, bastasse porre insieme le due equazioni $\left(\frac{d\varphi}{da}\right)=0$, $\left(\frac{d\varphi}{db}\right)=0$. Ma si deve avvertire, che le costanti a, b, riguardate come variabili, oltre i coefficienti $\left(\frac{d\varphi}{da}\right)$,

$\left(\frac{d\Phi}{db}\right)$ introducono nel differenziale secondo anche $\left(\frac{d^2\Phi}{da^2}\right)$, $\left(\frac{d^2\Phi}{db^2}\right)$ (944), e converrebbe che tutti fossero nulli, perché salva restasse l'identità del differenziale, cioè dovrebbero due sole indeterminate soddisfare a un più gran numero di equazioni, il che é generalmente impossibile.

1086. Procederemo dunque diversamente; osservando in primo luogo, che da $\Phi(x, y, a, b)=0$ risulta (955) $b=f(x, y, a)$; onde dal differenziale di $\Phi=0$ per a, b, avremo (959) 1.ª $\left(\frac{d\Phi}{da}\right)+\left(\frac{d\Phi}{db}\right)\left(\frac{db}{da}\right)=0$. Inoltre la stessa equazione $\Phi=0$ dà (959) 2.ª $\left(\frac{d\Phi}{dx}\right)+\left(\frac{d\Phi}{dy}\right)\left(\frac{dy}{dx}\right)=0=\Phi'(x, y, \left(\frac{dy}{dx}\right), a, b)$, e di qui 3.ª $\left(\frac{d\Phi'}{da}\right)+\left(\frac{d\Phi'}{db}\right)\left(\frac{db}{da}\right)=0$: e col mezzo di queste tre equazioni e della finita $\Phi=0$, eliminate a, b, $\left(\frac{db}{da}\right)$, avremo un' equazione di primo ordine spogliata affatto di costanti, e soluzione particolare della proposta.

Esemp. Sia $\Phi=y-\frac{a}{2}x^2-bx-a^2-b^2=0$, da cui per mezzo di $d\Phi=0$, $d^2\Phi=0$ (958) proviene $y-\frac{xdy}{dx}+\frac{x^2d^2y}{2dx^2}-\left(\frac{dy}{dx}-\frac{xd^2y}{dx^2}\right)^2-\frac{d^2y^2}{dx^4}=0$, che perciò avrà Φ per integrale finito. Dunque $\left(\frac{d\Phi}{da}\right)=-\frac{x^2}{2}-2a$, $\left(\frac{d\Phi}{db}\right)=-x-2b$; e la 1.ª diverrà $\frac{x^2}{2}+2a+(x+2b)\left(\frac{db}{da}\right)=0$. Inoltre $\left(\frac{d\Phi}{dx}\right)=-ax-b$, $\left(\frac{d\Phi}{dy}\right)=1$ e la 2.ª darà $\Phi'=-ax-b+\left(\frac{dy}{dx}\right)=0$. Infine $\left(\frac{d\Phi'}{da}\right)=-x$, $\left(\frac{d\Phi'}{db}\right)=-1$, e dalla 3.ª avremo $x+\left(\frac{db}{da}\right)=0$. Fatta l'eliminazione proposta, troveremo $(1+x^2)y-\left(x+\frac{x^3}{2}\right)\left(\frac{dy}{dx}\right)-\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\frac{x^4}{16}=0$.

che sarà la soluzione particolare di primo ordine della data.

1087. Ed é inutile avvertire, che a questo medesimo risultato avrebbe condotto l' ipotesi di $a=f(x, y, b)$, non potendosi cangiar l' essenza del calcolo, qualunque delle due variabili si prenda per funzione dell' altra. Noteremo piuttosto, che la soluzione particolare di primo ordine, considerata come equazion differenziale, può avere anche essa delle soluzioni particolari, le quali rispetto alla data si chiamano *soluzioni particolari doppie*. Queste procedendo dal trattarsi non solo come variabili, ma ancora come indipendenti le costanti della prima, e della seconda integrazione, coincideranno con ciò che si avrebbe dall' integrale finito ponendovi i valori di a, b dati dalle due equazioni $\left(\frac{d\Phi}{da}\right)=0$, $\left(\frac{d\Phi}{db}\right)=0$ (1085); e perciò sebben soddisfacciano alla soluzione particolare prima, non soddisfanno peraltro alla data differenziale di secondo ordine.

1088. È poi facile estender questi ragionamenti all' equazioni d'ordini superiori: anzi potranno applicarsi anche all'equazioni a differenze parziali con quelle poche modificazioni richieste dal maggior numero di costanti che entrano negl' integrali completi di queste equazioni (1073. 1.°). Così se l' equazione é di primo ordine ed $F(x, y, z, a, b)=0$ ne sia l' integrale (1073.2.°), le due equazioni $\left(\frac{d\Phi}{da}\right)=0$, $\left(\frac{d\Phi}{db}\right)=0$ avran luogo insieme, non potendo qui affacciarsi l' inconveniente, che abbiamo rilevato di sopra (1085).

Del resto il Sig. *La Grange*, a cui é interamente dovuta quest' importante teoria delle soluzioni particolari dell' equazioni, dà dei mezzi per ritrovarle anche nel caso, che l' integrale completo non si conosca. Noi non ci occuperemo di quest' indagine, sulla quale rimettiamo i nostri lettori agli atti di Berlino an. 1774. 1779, e al dodicesimo quinterno del Giornale della Scuola Politetnica, oppure ai citati corsi dei Sigg. *Paoli* e *Brunacci*, ove le memorie del Sig. *La Grange* son riportate quasi in intero, e passeremo intanto a qualche applicazione delle precedenti dottrine.

Applicazioni del Calcolo Integrale

Quadratura delle superficie .

1089. Sia la curva AM con le coordinate infinitamente
233 vicine PM$=y$, $pm=y+dy$, e il settore APM$=$S. Il trapezio infinitesimo Pm=(916)dS=(571)$\frac{1}{2}dx(2y+dy)$= (906.2.°)ydx darà S$=\int ydx$; ove, se porremo i valori delle ordinate x, y dati l' uno per l' altro dall' equazione alla curva, avremo la quadratura della superficie APM.

1090. Si noti 1.° che se le coordinate facciano un angolo obliquo ϕ, sarà S$=sen\phi\int ydx$ (674); 2.° che lo spazio compreso tra due coordinate y, y' verrà rappresentato dall' espressione $\int y'dx \backsim \int ydx$, alla quale si dà il nome d' *integrale definito*. Questo a differenza del completo (946) é di sua natura mancante della costante aggiunta, che dovendo esser comune tanto a $\int ydx$ che a $\int y'dx$ sparisce necessariamente nella differenza dei due integrali; 3.° che differenziando con dx costante, si avrebbe d^2S$=dydx$, d' onde S$=\int\int dydx$, purchè s' integri prima per y, poi per x, e si sostituisca il valor di y avanti di integrare per x.

1091. Indipendentemente dal principio infinitesimale può giungersi alla stessa importante equazione S$=\int ydx$ nel modo che segue. Fatto P$p=\delta x$, si chiamino S, S' i due settori APM, Apm; saranno (983) S$=\phi(x)$, S'$=\phi(x+\delta x)=$ (966) S$+\frac{dS}{dx}\delta x+\frac{d^2S}{2dx^2}\delta x^2+\frac{d^3S}{2.3dx^3}\delta x^3+$ec., ed S'$-S=PMmp=\frac{dS}{dx}\delta x+\frac{d^2S}{2dx^2}\delta x^2+$ec.; e supposta δx tale che in tutto lo spazio Pp dell' asse Ap non cada alcun' ordinata massima o minima, l' area PMmp risulterà visibilmente maggiore dell' uno e minore dell' altro dei due rettangoli P$p\times$PM$=y\delta x$, P$p\times pm=y'\delta x=\delta x\left(y+\frac{dy}{dx}\delta x+\frac{d^2y}{2dx^2}\delta x^2+\text{ec.}\right)$. Or poichè questi due limiti del-

l' area PMmp cominciano con lo stesso termine $y\delta x$, dovrà altresì cominciare col termine stesso anche il valore dell' area medesima, e sarà quindi $\frac{dS}{dx}\delta x=y\delta x$, d' onde $S=\int ydx$.

1092. Nel circolo $\int ydx=AQMP=\int dx\sqrt{(a^2-x^2)}$, 220
cioè, riducendo in serie il radicale (384), moltiplicando per dx, e quindi integrando ciascun termine del prodotto (950), $AQMP=C+ax-\frac{x^3}{2.3a}-\frac{x^5}{2.4.5a^3}-\frac{3x^7}{2.4.6.7a^5}-\frac{3.5x^9}{2.4.6.8.9a^7}-$ec. (178). Fatto $x=0$, sarà $AQMP=0$, e però $C=0$: dunque $AQMP=ax-\frac{x^3}{6a}-\frac{x^5}{40a^3}-$ ec. Fatto $x=a$, viene il quadrante BMQA; e poichè $AMP=\frac{x}{2}\sqrt{(a^2-x^2)}$, si ha il settore $AQM=AQMP-AMP=\frac{ax}{2}+\frac{x^3}{12a}+\frac{3x^5}{80a^3}+$ec.

1093. Nell'ellisse $\int ydx=\int\frac{bdx}{a}\sqrt{(a^2-x^2)}=\frac{b}{a}(ax-$ 221
$\frac{x^3}{2.3a}-\frac{x^5}{2.4.5a^3}-$ec.). Quindi, paragonando il circolo all' ellisse, si trova CB'NP:CBMP::a:b::AB'ab':ABab::PN:PM::SPN:SPM::SAN:SAM; ed essendo AB'$ab'=a^2\pi$; sarà AB$ab=ab\pi$, cioè *l' ellisse eguaglia un circolo del diametro medio proporzionale tra gli assi.*

1094. Nella parabola $\int ydx=\int dx\sqrt{px}=\frac{2x}{3}\sqrt{px}=\frac{2}{3}xy$.

1095. Nell' iperbola tra gli asintoti $xy=a^2$ e $\int ydx$ 222
$=\int\frac{a^2dx}{x}=a^2lx+C$. Se $x=AD=a$, allora lo spazio $Q'ADBN=a^2la+C$; dunque $BDPM=a^2lx-a^2la=a^2l\frac{x}{a}$. Quindi se $a^2=1$, sarà $BDPM=lx$, logaritmo

naturale dell' ascissa $AP = a + x$: ed ecco perchè chiamansi iperbolici i logaritmi del modulo 1 (406).

223 1096. Nella cicloide BMA, $xdy = dx\sqrt{(2ax - x^2)}$ (1012): ma $xdy = MQ.QQ'$, onde $\int xdy = BMQ$ (1089), e $\int dx\sqrt{(2ax - x^2)} =$ BIOP; dunque tutto lo spazio BMAD eguaglia il semicircolo BIOC, e lo spazio cicloidale é triplo del circolo genitore.

224 1097. Nella cissoide, $y = \frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{(a-x)}}$ (805), e $\int ydx = AKMPA = \int x^{\frac{3}{2}} dx (a-x)^{-\frac{1}{2}}$. Ora $\int x^{\frac{1}{2}} dx (a-x)^{\frac{1}{2}} = ACONP$ (1092); e se si riduca $\int x^{\frac{1}{2}} dx (a-x)^{\frac{1}{2}}$ a $\int x^{\frac{3}{2}} dx (a-x)^{-\frac{1}{2}}$, si troverà (1022) $\int x^{\frac{1}{2}} dx (a-x)^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} (a-x)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{3} \int x^{\frac{3}{2}} dx (a-x)^{-\frac{1}{2}}$. Dunque $\int x^{\frac{3}{2}} dx (a-x)^{-\frac{1}{2}} = 3 \int x^{\frac{1}{2}} dx (a-x)^{\frac{1}{2}} - 2x(ax - x^2)^{\frac{1}{2}}$, ovvero $APMKA = 3ACONP - 4ANP = 3ACONA - ANP$. Dunque, poichè quuando $x = a$, il triangolo ANP svanisce e il segmento ACONA si cangia nel semicircolo ACNB, lo spazio infinitamente lungo MKABQ è triplo del semircolo genitore.

225 1098. Nella logaritmica, $ydx = Ady$ (985), e $\int ydx = BAPM = Ay + C$: ma quando $y = 1 = AB$, lo spazio ABMP diventa nullo; dunque $C = -A$, e $ABMP = A(y-1) =$ al rettangolo OIQM. Se si fa $y = 0$, si avrà lo spazio infinitamente lungo $BXYA = -A =$ al rettangolo PQIT.

226 1099. Se l' ordinate partono da un punto fisso C, il trapezio $pPMr$ (1089) diventa un triangolo CMr, e quindi lo spazio $COMC = \frac{1}{2}\int ydx + C$. Sia Φ l' angolo, che fa CM con una retta fissa CA; avremo $Mr = yd\Phi$ (674.655), e $COMC = \frac{1}{2}\int y^2 d\Phi + C$.

1100. Nella spirale d' Archimede $AGFBN = x$, $AGFBA = c$, $CM = y$, $CA = a$, $Mr = \frac{ydx}{a}$, $d(COMC) = \frac{Mr.MC}{2}$ (1099) $= \frac{y^2 dx}{2a}$, $x = \frac{cy}{a}$ (814), $dx = \frac{cdy}{a}$, dunque $COMC = \frac{cy^3}{2.3a^2}$ senza costante; onde fatto $y = a$, lo spazio $COMAC = \frac{ac}{2.3} =$ al terzo di tutto il circolo.

1101. Non si è preso qui l' integrale $\frac{1}{2}\int y^2 d\Phi$, perchè questo non può estendersi al di là di $\Phi = 360°$, altrimenti i trian-

goli elementari $\frac{1}{2}y^2d\Phi$ conterrebbero i già sommati, difetto a cui può supplirsi calcolando i trapezj elementari tra due spire vicine. Lo stesso inconveniente ha luogo per la formula ordinaria $\int ydx$, se più ordinate corrispondano alla stessa ascissa.

1102. Nella spirale iperbolica scemando x, mentre cresce y (817), sarà $CN(a):Nn(-dx)::CM(y):Mr=-$ 227
$\frac{ydx}{a}$, dunque $COMC=\frac{1}{2}\int\frac{-y^2dx}{a}=(817)\frac{1}{2}\int bdy=\frac{1}{2}by+C$.

1103. Questo metodo può applicarsi anche alle curve, che han l'ordinate parallele. Vogliasi per esempio la quadratura del 228
settore parabolico AFM. Fatto l'angolo $AFM=\beta=2\Phi$, e perciò
$FM=y=\frac{\frac{1}{4}p}{cos^2\Phi}$ (754), sarà $\frac{1}{2}\int y^2d\Phi=\frac{p^2}{2.16}\int\frac{d\Phi}{cos^4\Phi}=(1041)$
$\frac{p^2}{2.16}\left(\frac{1}{3}sen\Phi\left(\frac{1}{cos^3\Phi}+\frac{2}{cos\Phi}\right)\right)=\frac{p^2}{2.16}\left(\frac{1}{3}tang\Phi\left(\frac{1}{cos^2\Phi}+2\right)\right)=$
(637) $\frac{1}{2.16}p^2(\frac{1}{3}tang^3\Phi+tang\Phi)$ senza costante, se il settore cominci dal punto A.

1104. Quindi (sia detto qui di passaggio) in due parabole AM, A'M' col fuoco ed asse medesimo e coi parametri p, p', i settori AFM, A'F'M', compresi tra due raggi vettori comuni, saran tra loro $::p^2:p'^2::FM^2:FM'^2::x^2:x'^2$ ec. (754).

Rettificazione delle Curve.

1105. Poichè (980) $ds=\sqrt{(dx^2+dy^2)}$, sarà l'arco $AM=s=\int\sqrt{(dx^2+dy^2)}+C$, o l'ordinate sieno pa- 229
sallele o partano da un punto fisso.

1106. Esempio. Nel circolo (984) $dx^2+dy^2=$
$\frac{a^2dx^2}{a^2-x^2}$, e $QM=s=\int\frac{adx}{\sqrt{(a^2-x^2)}}=(384)\ x+\frac{x^3}{2.3a^2}+$ 229
$\frac{1.3x^5}{2.4.5a^4}+\frac{1.3.5x^7}{2.4.6.7a^6}+$ ec.

1107. Nella parabola, $AM=\int dy\sqrt{\left(1+\frac{4y^2}{p^2}\right)}=\frac{2}{p}\int dy\times$ 230
$\sqrt{\left(y^2+\frac{p^2}{4}\right)}=(1027)C+\frac{y}{p}\sqrt{\left(y^2+\frac{p^2}{4}\right)}+\frac{p}{4}l\left(y+\sqrt{\left(y^2+\frac{p^2}{4}\right)}\right)$.

Facciamo $y=0$, sarà $C=-\frac{p}{4}l\frac{p}{2}$; dunque $AM=\frac{y}{p}\sqrt{\left(y^2+\frac{p^2}{4}\right)}+\frac{p}{4}l2\left(\frac{y+\sqrt{(y^2+\frac{1}{4}p^2)}}{p}\right)$.

1108. Che se col centro A e col semiasse maggiore
229 $BA=\frac{1}{2}p$ si descriva un' iperbola equilatera BN', lo spazio ABN'Q sarà $\int xdy$ (1089) $=\int dy\sqrt{(y^2+\frac{1}{4}p^2)}$ (780); dunque $AM\left(=\frac{2}{p}\int dy\sqrt{\left(y^2+\frac{p^2}{4}\right)}\right)=\frac{2}{p}\times ABN'Q$ e però $AM\frac{1}{2}p=ABN'Q$, onde *la rettificazione della parabola dipende dalla quadratura dell' iperbola e reciprocamente*.

1109. Nell' ellisse, supposto il semiasse maggiore $=1$, sa-
231 rà $y^2=b^2(1-x^2)$, e fatto $1-b^2=e^2$ (746), si ha $BM=$

$$\int dx\sqrt{\frac{1-e^2x^2}{1-x^2}}=\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}}\left(1-\frac{e^2x^2}{2}-\frac{e^4x^4}{2.4}-\frac{1.3e^6x^6}{2.4.6}-\frac{1.3.5e^8x^8}{2.4.6.8}-\text{ec.}\right)=\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}}-\frac{e^2}{2}\int\frac{x^2dx}{\sqrt{(1-x^2)}}-\frac{e^4}{2.4}\int\frac{x^4dx}{\sqrt{(1-x^2)}}-\frac{1.3e^6}{2.4.6}\int\frac{x^6dx}{\sqrt{(1-x^2)}}-\text{ec.}$$

; e riducendo gl' integrali di ciascun termine a $\int dx(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ (1020) $=DN$ (1106), si avrà $BM=$

$$\left(1-\frac{e^2}{2^2}-\frac{3e^4}{2^2.4^2}-\frac{3^2.5e^6}{2^2.4^2.6^2}-\frac{3^2\,5^2\,7e^8}{2^2\,4^2.6^2\,8^2}-\text{ec.}\right)\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}}+e^2x(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2^2}+\frac{3e^2}{2^2.4^2}+\frac{3^2.5e^4}{2^2.4^2.6^2}+\text{ec.}\right)+e^4x^3(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2.4^2}+\frac{3.5e^2}{2.4^2.6^2}+\frac{3\,5^2.7e^4}{2.4^2.6.^28^2}+\text{ec.}\right).$$

La rettificazione dell' iperbola si ha quasi collo stesso metodo, e può vedersi nelle Memorie di Berlino an. 1746 e seg. la maniera di ridurre alla rettificazione di queste due curve gli integrali d' un gran numero d' altre differenziali.

1110. Nella seconda parabola cubica, $y^3=gx^2$; dunque $s=\int dy\left(1+\frac{9y}{4g}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{8}{27}g\left(1+\frac{9y}{4g}\right)^{\frac{3}{2}}+C$ (950. II.°), perchè qui $n=0$ ed $m=1$; fatto $y=0$, si ha $C=-\frac{8}{27}g$, e l' arco, preso

dall' origine, $=\frac{8}{27}g\left(\left(1+\frac{9y}{4g}\right)^{\frac{3}{2}}-1\right)$ (1011). In generale le parabole $y^{k}=gx^{k-1}$, che (preso per k un numero impari cominciando da 3) danno $s=\int dy\left(1+\frac{k^2}{(k-1)^2}\left(\frac{y}{g}\right)^{\frac{2}{k-1}}\right)^{\frac{1}{2}}$, son tutte rettificabili, avendosi in tutte (950. II.) $n=0$, $m=\frac{2}{k-1}$ e $c=\frac{k-3}{2}$.

1111. Nella cicloide, $dy=dx\sqrt{\left(\frac{2r-x}{x}\right)}$ (988), dunque 236
$s=\int dx\sqrt{\frac{2r}{x}}=BM=2\sqrt{2rx}=2BO$, cioé fatto $x=2r$, la curva cicloidale é quadrupla del diametro BD (1012).

1112. Nella logaritmica, $ydx=ady$ (986), $s=\int\frac{dy}{y}\sqrt{(y^2+a^2)}$: se $\sqrt{(y^2+a^2)}=z$, si avrà $\frac{dy}{y}=\frac{zdz}{z^2-a^2}$, ed $s=\int\frac{z^2dz}{z^2-a^2}=z+\frac{a}{2}l\frac{z-a}{z+a}$ (1024) $=z+al\sqrt{\frac{z-a}{z+a}}=z+al\left(\frac{\sqrt{(z^2-a^2)}}{z+a}\right)=\sqrt{(y^2+a^2)}+al\left(\frac{y}{a+\sqrt{(y^2+a^2)}}\right)=\sqrt{(y^2+a^2)}-al\left(\frac{a+\sqrt{(a^2+y^2)}}{y}\right)+C$, espressione di un arco di logaritmica, in cui C é facile a determinarsi (1098).

1113. Nella spirale d'Archimede $ds=Mm=\sqrt{(rm^2+Mr^2)}=$ 226
$\sqrt{\left(dy^2+\frac{y^2dx^2}{a^2}\right)}$ (989) : ma $x=\frac{cy}{a}$; dunque $s=COM=\int\frac{cdy}{a^2}\sqrt{\left(y^2+\frac{a^4}{c^2}\right)}$. Descritta una parabola CN' con $p=\frac{2a^2}{c}$, fatto CQ $=$ CM $=y$ e condotta l' ordinata QN', sarà $CN'=\int\frac{cdy}{a^2}\sqrt{\left(\frac{a^4}{c^2}+y^2\right)}$ (1107) ; dunque CN'=COM : onde regna dell' analogia tra questa spirale e la parabola.

1114. Nella spirale logaritmica (679) $\cos Mmr(c).mr(dy)::1:$ 176
$Mm=\frac{dy}{c}$, dunque $ADM=\frac{y}{c}=MT$ per essere simili i triangoli mrM, MAT.

Misura delle solidità.

1115. Un solido S da misurarsi s' immagini decomposto in un' infinità di piccoli strati paralleli: chiamando t la base di uno di essi, dz l' altezza o una parte infinitesima della sua distanza dal vertice, tdz ne sarà il volume, che essendo il differenziale del solido dà dunque $S=\int tdz$. E si noti 1.° che se il solido è di rivoluzione, t potrà esser circolo, di cui chiamato y il raggio, avremo $S=\pi\int y^2dz$: 2.° se sia piramidale dell' altezza a e base b, onde (596) $b:t::a^2:z^2$, avremo $S=\frac{b}{a^2}\int z^2dz=\frac{bz^3}{3a^2}+C$, ove $z=0$ dà $S=0$ e $C=0$, e $z=a$ dà per l' intera piramide $S=\frac{ab}{3}$ (620).

3.° Poichè (1089) $t=\int ydx=\int\int dydx$, sarà dunque $S=\int tdz=\int\int ydxdz=\int\int\int dxdydz$, purchè rapporto alle integrazioni si rammentino le avvertenze date altrove (1089. 3.°).

1116. Nella sfera $y^2=2ax-x^2$: dunque per la solidità di un segmento sferico in cui $z=x$, si avrà $S=\pi\int(2ax-x^2)dx=\pi x^2(a-\frac{1}{3}x)$ (626). La costante non ha luogo, perchè con $x=0$ si ha $S=0$. Fatto $x=2a$, si ha per la solidità della sfera $S=\frac{4}{3}a^3\pi$(623).

1117. Nell' ellisse, $y^2=\frac{b^2}{a^2}(2ax-x^2)$; dunque il solido generato dalla sua rivoluzione intorno all' asse maggiore sta alla sfera circoscritta $::b^2:a^2$, ovvero è $\frac{2}{3}$ del cilindro circoscritto.

1118. Si chiama *Ellissoide allungata* quella che abbiamo considerata, ed *Ellissoide compressa* quella che è formata dalla rivoluzione dell' Ellisse intorno al suo asse minore. È facile il trovare, che anche quest' ultimo solido è $\frac{2}{3}$ del cilindro circoscritto. Dunque l' ellissoide allungata sta all' ellissoide compressa $::ab^2:a^2b::b:a$.

1119. Nella parabola $y^2 = px$, e fatto $z = x$ si avrà per un segmento paraboidale $S = \pi \int px dx = \frac{\pi p x^2}{2} = \frac{\pi y^2 x}{2}$, metà del cilindro circoscritto.

In tutte le parabole $y^m = x^n a^{m-n}$, e $\int \pi y^2 dx = \frac{m\pi \sqrt[m]{a^{2m-2n} x^{2n+m}}}{2n+m} = \frac{m\pi x \sqrt[m]{a^{2m-2n} x^{2n}}}{2n+m} = \frac{m\pi x y^2}{2n+m}$, e perciò il solido starà al cilindro circoscritto $:: m : m+2n$.

1120. Similmente se l'iperbola, la cui equazione é $y^m x^n =$ 232
a^{m+n}, gira intorno all'asintoto CP, prendendo CD=AD=a, il solido descritto dal trapezio ADPM avrà per espressione $\frac{m}{2n-m}\pi(a^3 - xy^2)$, e perciò supposto $2n > m$, il solido descritto dallo spazio infinitamente lungo OADX sta al cilindro descritto da AECD$:: m : 2n-m$, e nell' iperbola ordinaria è eguale a questo cilindro.

Superficie dei solidi.

1121. Se la superficie da misurarsi si divida in un' infinità di piccole zone prima parallelamente al piano delle x, z (729), poi parallelamente al piano delle y, z, si troverà decomposta in infiniti rettangoli coi lati diretti nel senso delle coordinate y, x, ciascun dei quali potrà considerarsi come piano, e sarà l' elemento della superficie cercata.

Per determinarne l'espressione si osserverà primieramente 240
che l' area d' una figura comunque inclinata sopra di un piano eguaglia quella della sua projezione divisa per il coseno della sua inclinazione. Infatti sia RSPQ il piano di projezione, LFME quello della figura, e fatta sopra di questa la sezione BD normalmente all' intersezione LF, si conduca DC perpendicolare al piano RSPQ. Sarà DBC l' inclinazione, che chiameremo I, dei due piani, ed avremo BD:BC.$: 1 : \cos I$, rapporto, che verificandosi tra una sezione qualunque e la sua projezione, dovrà sus-

sistere ancora tra la superficie e la projezione della figura totale (287. V.): onde chiamata S la figura, S' la projezione, sarà $S=\frac{S'}{\cos I}$.

1122. Frattanto se dal punto A, che prendo per origine
240 delle coordinate, si conduca AG normalmente al piano della figura, e da G la GT perpendicolare a quello di projezione, che suppongo essere il piano delle x, y, fatta $AG=r$ e supposte x, y, z le coordinate di G, avremo $GT=z$, e $sen TAG=\frac{z}{r}=\cos I=\frac{S'}{S}$. Ma in primo luogo (730) $r=\sqrt{(x^2+y^2+z^2)}$, e perciò $x^2+y^2+z^2-r^2=0$, (959) $x+z\left(\frac{dz}{dx}\right)=0$, $y+z\left(\frac{dz}{dy}\right)=0$; dunque $\frac{z}{r}=\frac{1}{\sqrt{\left(1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right)}}$. Inoltre se S rappresenti il nostro rettangolo elementare, che come osservammo, ha i lati nel senso delle x e delle y, S' sua projezione sul piano delle y, x dovrà eguagliare il prodotto $dxdy$ dei differenziali di queste variabili: dunque sostituito l' uno e l' altro valore avremo infine $S=dxdy\sqrt{\left(1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right)}$, differenziale di secondo ordine, che integrato due volte darà la superficie cercata.

1123. Se il solido é di rivoluzione generata dal poligono
241 AMBC, in cui $AM=s$, $MP=y$, può aversene più speditamente la superficie. Poichè immaginandola divisa in infinite zone Mm' con sezioni normali all' asse del solido, ciascuna di queste rappresenterà un cono troncato, la cui superficie (610) $2\pi(2y+dy)\times\frac{ds}{2}=2\pi yds$ sarà l' elemento della cercata, onde avremo $S=2\pi\int yds=$ (980) $2\pi\int ndx$. Dunque nella sfera (984) $S=2a\pi x$, e fatto $x=2a$, sarà $S=4a^2\pi$ superficie totale (612).

1124. Nella parabola $S=$ (985) $2\pi\int dx\sqrt{\left(px+\frac{p^2}{4}\right)}=\frac{4\pi}{5p}\sqrt{\left(px+\frac{1}{4}p^2\right)^3}+C$ (950). Sia $x=0$, sarà $C=-\frac{\pi p^2}{6}$.

1125. Nell' ellisse fatto a il semiasse di rivoluzione, che sarà il trasverso nell' ellissoide allungata, e il conjugato nella 242
compressa; e posto ne' due diversi casi $\pm a^2 \mp b^2 = e^2$, si avrà (771. 2.°) $n = \frac{be}{a^2}\sqrt{\left(\frac{a^4}{e^2} \mp x^2\right)}$, e però se la curva giri o intorno ad AA o intorno ad EE, si avrà $\frac{2be\pi}{a^2}\int dx\sqrt{\left(\frac{a^4}{e^2} \mp x^2\right)}$. Nel primo caso, descritto col raggio CD$=\frac{a^2}{e}$ un arco DBN, la superficie fatta da AM intorno ad AA sarà (1092) $\frac{2be\pi}{a^2}$ABNP; ma nel secondo, determinata C col porre $x=0$, sarà (1027) $\frac{be\pi x}{a^2}\sqrt{\left(\frac{a^4}{e^2} + x^2\right)} + \frac{a^2 b\pi}{e}\, l\, \frac{e}{a^2}\left(x + \sqrt{\left(\frac{a^4}{e^2} + x^2\right)}\right)$.

1126. Nell' iperbola fatto a il semiasse di rivoluzione che può essere o il trasverso o il conjugato, e posto $a^2 + b^2 = e^2$, si 243
avrà (780, 786) $n = \frac{be}{a^2}\sqrt{\left(x^2 \mp \frac{a^4}{e^2}\right)}$, e però se la curva giri o intorno a CA o intorno a CQ, si avrà $\frac{2be\pi}{a^2}\int dx\sqrt{\left(x^2 \mp \frac{a^4}{e^2}\right)}$. Nel primo caso, determinata C col fare $x = a$, la superficie cercata sarà (1027) $\frac{be\pi x}{a^2}\sqrt{\left(x^2 - \frac{a^4}{e^2}\right)} - b^2\pi - \frac{a^2 b\pi}{e}\, l\, \frac{ex + \sqrt{(e^2x^2 - a^4)}}{a(e+b)}$: ma nel secondo determinata C con fare $x = 0$, sarà (1027) $\frac{be\pi x}{a^2}\sqrt{\left(x^2 + \frac{a^4}{e^2}\right)} + \frac{a^2 b\pi}{e}\, l\left(\frac{ex}{a^2} + \sqrt{\left(1 + \frac{e^2x^2}{a^4}\right)}\right)$.

Calcolo delle Variazioni

1127. Oltre quel genere di *Massimi* e *Minimi*, di cui parlammo (1014), un altro ve ne é più elevato, che ha data origine al *Calcolo delle Variazioni*. In quello si cerca il massimo o minimo valore di una funzione, che è data; in questo si vuol la funzione, che fra tutte quelle di un genere determinato é massima o minima. Così il problema di determinar nel circolo la massima ordinata, riguarda il primo genere: ma quello di trovar tra tutte l' isoperimetre la curva della massima area (579. II.° III.°), appartiene al secondo. È vero che ambedue i generi dipendono dagli stessi principj, e che alcuni problemi spettanti al secondo posson trattarsi anche coi metodi del primo, ma tali soluzioni son per lo più assai complicate e poco naturali.

1128. Sia BD una curva, che abbia per asse la retta $AE=a$,
244 e fatta $AP=x$, $PM=z=\varphi(x)$, se si prenda $PT=dx$, e si conduca l' ordinata TV, sarà $PMVT=zdx$ (1089), $ABMP=\int zdx$, che va a zero se $x=0$, e diviene ABDE se $x=a$. Chiamisi H l' area ABDE, dunque se, stando ferma l' ascissa, z *varj* in più o in meno di una quantità infinitesima Mf, e sia β la *caratteristica della variazione*, come d lo é della differenziazione, avremo $Mf=\beta z$ *variazione* di z, $MfiV=\beta zdx$ *variazione* di $zdx=PMVT$, $BCfM=\int\beta zdx$ somma degli elementi $MfiV$ e *variazione* dell' area ABMP, e $BCKD=\beta H$ *variazione* dell' area $ABDE=H$. Quindi se H debba essere un massimo o un minimo, bisognerà che l' area BCKD si annulli e sarà $\beta H=\beta ABDE=\beta\int zdx=0$ (1014), preso l' integrale da $x=0$ fino ad $x=a$. Di qui si avrà la relazione tra x e z, o l' equazione alla curva, che ha la proprietà del massimo o del minimo.

1129. Il Calcolo delle Variazioni deve dunque insegnarci a trovar la variazione di H o il valor di βH, che andando poi a zero determina il cercato massimo o minimo; ed eccone intanto i principj:

1.° Poichè z, z' divengono $z+\beta z$, $z'+\beta z'$ e $z'=z+dz$ (912), dunque $\beta z'=\beta z+\beta dz$, e $\beta dz=\beta z'-\beta z=d\beta z$ (912), cioé *la variazione d' un differenziale eguaglia il differenziale della*

sua variazione. Perciò scrivendo dz invece di z, sarà $\beta d^2z = d\beta dz = d^2\beta z$, e di nuovo scritto qui dz in luogo di z, verrà $\beta d^3z = d\beta d^2z = d^2\beta dz = d^3\beta z$; e in generale $\beta d^n z = d^n \beta z$, o preso $m<n$, $\beta d^n z = d^m \beta d^{n-m} z$.

2.° Supposto $u = \int zdx$ sarà variando $\beta u = \beta \int zdx$, e differenziando, $du = zdx$; dunque $\beta du (= d\beta u) = \beta zdx$, e integrando, $\beta u = \int \beta zdx = \beta \int zdx$, cioè *la variazione dell'integrale* $\int zdx$ *eguaglia l'integrale della variazione di* zdx. Perciò scrivendo $\int z$ invece di z, avremo $\int \beta \int zdx = \beta \int \int zdx = \int \int \beta zdx$ ec.

3.° Cangiandosi z in $z \pm dz$ nella differenziazione, ed in $z \pm \beta z$ nella variazione, ad onta della diversità tra le differenze e le variazioni, *si ha la variazione di* z *come se ne ha la differenza*, purchè in luogo di dz, dy si scriva βz, βy, e si faccia x costante; così la variazione di $z = ax^2y + bxy^2$, sarà $\beta z = ax^2\beta y + 2bxy\beta y$, ec.

1130. Dunque $\beta(zdx) = dx\beta z + z\beta dx$: ma $\beta dx = d\beta x = 0$; dunque $\beta(zdx) = dx\beta z$ e $\int \beta(zdx) = \int dx\beta z = \beta \int (zdx)$ (1129. 2.°). Parimente 1.° se $z = \Phi(x, y, p, q, \text{ec.})$ e $p = \frac{dy}{dx}$, $q = \frac{d^2y}{dx^2}$, $r = \frac{d^3y}{dx^3}$, ec. sarà $\beta p = \frac{\beta dy}{dx}$ (1129. 5.°) $= \frac{d\beta y}{dx}$ (1129. 1.°), $\beta q = \frac{\beta d^2y}{dx^2} = \frac{d^2\beta y}{dx^2}$, $\beta r = \frac{\beta d^3y}{dx^3} = \frac{d^3\beta y}{dx^3}$, ec.; 2.° $\beta(zdx) = dx\beta z = dxQ\beta y + dxR\beta p + dxS\beta q + \text{ec.} = Qdx\beta y + Rd\beta y + \frac{Sd^2\beta y}{dx}$, ec.; 3.° $\int \beta zdx = \beta \int zdx$ (1129. 2.°) $= \int Qdx\beta y + \int Rd\beta y + \int \frac{Sd^2\beta y}{dx}$, ec.: ma $\int Rd\beta y = R\beta y - \int dR\beta y$ (952) $= R\beta y - \int \frac{dxdR\beta y}{dx}$, e parimente $\int \frac{Sd^2\beta y}{dx} = \frac{Sd\beta y}{dx} - \int \frac{dSd\beta y}{dx} = \frac{Sd\beta y}{dx} - \frac{dS\beta y}{dx} + \int \frac{d^2S\beta y}{dx} = \frac{Sd\beta y}{dx} - \frac{dS\beta y}{dx} + \int \frac{d^2Sdx\beta y}{dx^2}$, ec.; dunque $\beta \int zdx = \int dx\beta y \left(Q - \frac{dR}{dx} + \frac{d^2S}{dx^2} - \text{ec.}\right) + \beta y \left(R - \frac{dS}{dx} + \text{ec.}\right) + \frac{d\beta y}{dx}(S - \text{ec.})$

$+$ec., ed avremo un massimo o un minimo se porremo l'equazione $Q-\frac{dR}{dx}+\frac{d^2S}{dx^2}-$ec.$=0$, e se, dopo averla integrata, determineremo le costanti in maniera che si abbia $R-\frac{dS}{dx}+$ec.$=0$, $S-$ec.$=0$, ec. Ecco gli esempj.

I. Qual' è la curva, in cui $\int zdx=\int\sqrt{\frac{dx^2+dy^2}{y}}$ è un massimo o un minimo? Poichè $\frac{dy}{dx}=p$, verrà $\sqrt{(dx^2+dy^2)}=dx\sqrt{(1+p^2)}$, onde $z=\sqrt{\frac{1+p^2}{y}}$, $dz(=Pdx+Qdy+Rdp)=\frac{pdp}{\sqrt{y(1+p^2)}}-\frac{dy\sqrt{(1+p^2)}}{2y\sqrt{y}}$ e $\beta z=\frac{p\beta p}{\sqrt{y(1+p^2)}}-\frac{\beta y\sqrt{(1+p^2)}}{2y\sqrt{y}}=Q\beta y+R\beta p$; dunque $P=0$, $Q=\frac{\sqrt{(1+p^2)}}{2y\sqrt{y}}$, $R=\frac{p}{\sqrt{y(1+p^2)}}$; e poiché dee qui aversi $Q-\frac{dR}{dx}=0$, (1130. 3.°), sarà $Qpdx(=Qdy)=pdR$: ma essendo $P=0$, viene $dz=Qdy+Rdp=pdR+Rdp$; dunque integrando, $z\left(=\sqrt{\frac{1+p^2}{y}}\right)=pR+C=\frac{p^2}{\sqrt{y(1+p^2)}}+C$, e $C=\frac{1}{\sqrt{y(1+p^2)}}$. Pertanto se si faccia $y(1+p^2)=m$, sarà $C=\frac{1}{\sqrt{m}}$, $p\left(=\frac{dy}{dx}\right)=\sqrt{\frac{m-y}{y}}$, e $dy=dx\sqrt{\frac{m-y}{y}}$, equazione ad una cicloide (988), il cui circolo genitore ha per diametro m. La riduco a $dx=dy\sqrt{\frac{y}{m-y}}=\frac{ydy}{\sqrt{(my-y^2)}}=\frac{mdy}{2\sqrt{(my-y^2)}}-\frac{\left(\frac{m}{2}-y\right)dy}{\sqrt{(my-y^2)}}$, ed integrandola per un circolo del raggio $\frac{m}{2}$, ottengo $x=arc.\,sen\,v.\,y$ (931. 7.°) $-\sqrt{(my-y^2)}+C$ (949), con che abbiamo le due costanti arbitrarie m, C. Per determinarle faccio $R-\frac{dS}{dx}=0$

(1130. 3.°), cioè $R\left(=\frac{p}{\sqrt{y(1+p^2)}}\right)=0$, perchè qui $S=0$, e viene $p=0=\sqrt{\frac{m-y}{y}}$, e perciò $y=m$: quindi l' equazione integrata; postovi $y=m$ ed $x=a$ (1128), diverrà $a=arc.sen.v.m+C$: ma essendo m il diametro, $arc.sen.v.m$ è evidentemente la semicirconferenza $\frac{1}{2}m\pi$; dunque $C=a-\frac{1}{2}m\pi$; di più se quando $x=0$ si vuole anche $y=0$, l' equazione integrata si cangerà in $0=a-\frac{1}{2}m\pi$ e sarà $m=\frac{2a}{\pi}$. Del resto, si ha qui un minimo, poichè la data formula, sostituito il valore di $p=\sqrt{\frac{m-y}{y}}$, diventa $\int dx\frac{\sqrt{m}}{y}$, da cui, facendo al solito $y=0$, viene un infinito.

II. Fra tutte le curve isoperimetre trovar quella in cui l'area $\int ydx$ (1089) è un massimo o un minimo. Giacché l'espressione della lunghezza di un arco è (1105) $\int\sqrt{(dx^2+dy^2)}=\int dx\sqrt{(1+p^2)}$ (I), e questa per la natura degli isoperimetri non varia, avremo $\beta\int dx\sqrt{(1+p^2)}=0$: ma anche $\beta\int ydx=0$ (1128); dunque il problema si ridurrà a trovar la curva in cui $\int zdx=\int ydx+\int gdx\sqrt{(1+p^2)}$ é un massimo o un minimo, moltiplicata per g costante l' espressione dell'arco, onde sieno omogenei i due integrali. Si avrà pertanto $z=y+g\sqrt{(1+p^2)}$, $\beta z=\beta y+\frac{gp\beta p}{\sqrt{(1+p^2)}}$, onde $Q=1$, $R=\frac{gp}{\sqrt{(1+p^2)}}$, $Q-\frac{dR}{dx}=0$; e ripetuto il raziocinio del passato problema, verrà $z(=y+g\sqrt{(1+p^2)})=pR+C=\frac{gp^2}{\sqrt{(1+p^2)}}+C$, $(C-y)\sqrt{(1+p^2)}=g$, $p\left(=\frac{dy}{dx}\right)=\frac{\sqrt{(g^2-(C-y)^2)}}{C-y}$, e $dx=\frac{dy(C-y)}{\sqrt{(g^2-(C-y)^2)}}$; dunque integrando, $x=\sqrt{(g^2-(C-y)^2)}+C'$, cioè $(C-y)^2=g^2-(x-C')^2$ equazione al circolo, in cui le costanti g, C, C' si determineranno come sopra (I.), avvertendo di più che la lunghezza della curva può supporsi data: ed é chiaro che il radicale portando il doppio

segno, e perciò potendo descriversi il circolo onde rivolga all'ascissa o la concavità o la convessità, avremo un massimo nel primo caso, un minimo nel secondo.

III. Fra tutte le curve isoperimetre trovar quella il cui solido di rivoluzione ha la massima o minima superficie $2\pi\int y\sqrt{(dx^2+dy^2)}$ (1123). Trascurato 2π, che é un numero costante, e fatta $\sqrt{(dx^2+dy^2)}=dx\sqrt{(1+p^2)}$, dovrà essere, come nell' antecedente problema, $zdx=\int ydx\sqrt{(1+p^2)}+\int gdx\sqrt{(1+p^2)}$ un massimo o un minimo; dunque $z=(y+g)\sqrt{(1+p^2)}$, $\beta z=\beta y\sqrt{(1+p^2)}+\frac{(y+g)p\beta p}{\sqrt{(1+p^2)}}$, onde $Q=\sqrt{(1+p^2)}$, $R=\frac{(y+g)p}{\sqrt{(1+p^2)}}$, $Q-\frac{dR}{dx}=0$, e fatto il solito raziocinio, $z(=(y+g)\sqrt{(1+p^2)})=pR+C=\frac{(y+g)p^2}{\sqrt{(1+p^2)}}+C$, $C=\frac{y+g}{\sqrt{(1+p^2)}}$, $p\left(=\frac{dy}{dx}\right)=\frac{1}{C}\sqrt{((y+g)^2-C^2)}$, e $dx=\frac{Cdy}{\sqrt{((y+g)^2-C^2)}}$, equazione alla curva volgarmente detta la *Catenaria*, perchè una catena flessibilissima se sia sospesa per le sue estremità, si conforma in questa curva. E qui pure atteso il doppio segno, che compete al radicale, si avrà un massimo quando la curva rivolga la concavità all' asse ed un minimo quando gli volga la convessità.

Calcolo delle Differenze finite

1131. Già sappiamo che cangiato l'algoritmo d delle differenze infinitesime (910) nell'algoritmo δ delle finite può aversi (918) $\delta\varphi(x)=A\delta x+B\delta x^2+C\delta x^3+$ec, essendo A, B, C, ec. i coefficienti delle successive potenze δx, δx^2, δx^3, ec. nello sviluppo di $\varphi(x\pm\delta x)$, e che posson determinarsi coi metodi già accennati nel calcolo differenziale (918).

1132. Dunque $\delta(\pm x^n)=\pm nx^{n-1}\delta x+\frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}\delta x^2\pm\frac{n(n-1)(n-2)}{2.3}x^{n-3}\delta x^3+$ec. Oppostamente preso σ per il segno integrale (945), avremo $\sigma(\pm nx^{n-1}\delta x+\frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}\delta x^2\pm$ ec.$)=\pm x^n+C$. Sia δx costante e 1.° $n=1$; dunque $\sigma\delta x=$ (947) $\delta x\sigma 1=x$, e $\sigma 1=\frac{x}{\delta x}$; 2.° $n=2$; dunque $\sigma(2x\delta x+\delta x^2)=2\delta x\sigma x+\delta x^2\sigma 1=x^2$, e $\sigma x=\frac{x^2}{2\delta x}-\frac{x}{2}$; 3.° $n=3$; dunque $\sigma(3x^2\delta x+3x\delta x^2+\delta x^3)=3\delta x\sigma x^2+3\delta x^2\sigma x+\delta x^3\sigma 1=x^3$, e $\sigma x^2=\frac{x^3}{3\delta x}-\frac{x^2}{2}+\frac{x\delta x}{6}$, ec., onde se $\delta x=1$, verrà $\sigma 1=x$, $\sigma x=\frac{1}{2}(x^2-x)$, $\sigma x^2=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x$, e parimente troveremo $\sigma x^3=\frac{x^2(x-1)^2}{4}$, $\sigma x^4=\frac{x}{30}(6x^4-15x^3+10x^2-1)$, $\sigma x^5=\frac{x^2}{12}(2x^4-6x^3+5x^2-1)$, ec.

1133. Ma debba differenziarsi il prodotto $y=x(x-1)(x-2)\ldots(x-n)$, supposta $\delta x=1$. Avremo (913) $\delta y=(x+1)x(x-1)(x-2)\ldots(x-n+1)-x(x-1)(x-2)\ldots(x-n)=x(x-1)(x-2)\ldots(x-n+1)(x+1-x+n)=x(x-1)(x-2)\ldots(x-n+1)(n+1)$.
Dunque $\sigma(x(x-1)(x-2)\ldots(x-n+1))=\frac{x(x-1)(x-2)\ldots(x-n)}{n+1}+C$,

e se si cangi n in $n+1$, avremo egualmente $\sigma(x(x-1)(x-2)\ldots(x-n))=\frac{x(x-1)(x-2)\ldots\ldots(x-n-1)}{n+2}+C.$

1134. Si trova nel modo stesso $\delta(x(x+1)(x+2)\ldots\ldots(x+n))=(x+1)(x+2)(x+3)\ldots\ldots(x+n)(n+1)$; e $\sigma(x(x+1)(x+2)\ldots\ldots(x+n))=\frac{(x-1)x(x+1)(x+2)\ldots(x+n)}{n+2}+C.$

1135. Sia da differenziarsi $y=2x(2x-1)(2x-2)\ldots\ldots(2x-n)$, supposta $\delta x=1$: avremo $\delta y=(2x+2)(2x+1)2x(2x-1)\ldots\ldots(2x-n+2)-2x(2x-1)(2x-2)\ldots\ldots(2x-n+2)(2x-n+1)(2x-n)=2x(2x-1)(2x-2)\ldots(2x-n+2)((2x+2)(2x+1)-(2x-n+1)\times(2x-n))=2x(2x-1)(2x-2)\ldots\ldots(2x-n+2)(4x+4nx-n^2+n+2)=2x(2x-1)(2x-2)\ldots\ldots(2x-n+2)(n+1)(4x-n+2)$; e quindi $\sigma(2x(2x-1)(2x-2)\ldots\ldots(2x-n+2)(4x-n+2))=\frac{2x(2x-1)(2x-2)\ldots\ldots(2x-n)}{(n+1)}$, ossia cangiando n in $n-2$, $\sigma(2x(2x-1)(2x-2)\ldots\ldots(2x-n+4)(4x-n+4))=\frac{2x(2x-1)(2x-2)\ldots\ldots(2x-n+2)}{(n-1)}$. Avremo egualmente

$$\sigma\frac{1}{(mx+a)(mx+a+m)(mx+a+2m)\ldots\ldots(mx+a+nm)}=-\frac{1}{mn}\times\frac{1}{(mx+a)(mx+a+m)\ldots\ldots(mx+a+(n-1)m)}.$$

1136. Passiamo dopo tutto questo a integrare l' equazione lineare di prim' ordine $y'-py-X=0$, ove $y'=y+\delta y=y+1$, e p ed X son funzioni di x. Fatto $y=rz$, onde $\delta y=r\delta z+z\delta r+\delta r\delta z$, l'equazione si cangerà in $rz(p-1)-r\delta z-z\delta r-\delta r\delta z+X=0$; e se sia $rz(p-1)-z\delta r=0$ ovvero I.ª $pr=r+\delta r$, verrà $r\delta z+\delta r\delta z=X$, ovvero II.ª $\delta z=\frac{X}{pr}$. La I.ª s' integra riducendola a $lp=l(r+\delta r)-lr=\delta(lr)$ (913), onde $lr=\sigma lp$ ed $r=e^{\sigma lp}$: perciò dalla II.ª si ha $\delta z=\frac{X}{pe^{\sigma lp}}$, $z\left(=\frac{y}{r}\right)=\sigma\frac{X}{pe^{\sigma lp}}$, ed $y=e^{\sigma lp}\left(\sigma\frac{X}{pe^{\sigma lp}}+C\right)$.

1157. Poichè la somma σ di tutti i valori di lp dipende da x di cui p è funzione (1136), ed $x = \delta(x-1+x-2+x-3+\text{ec.})$ (916), si avrà σlp col cangiar successivamente x in $x-1$, $x-2$, $x-3$.....3, 2, 1, e col prender la somma dei logaritmi di queste quantità o il logaritmo del loro prodotto (400. 1.°) che chiamo $l\pi p$. Quindi $r = e^{\sigma lp} = e^{l\pi p} = \pi p$ (308. 3.°), e chiamando p' il termine, che viene immediatamente dopo p nella serie ec.... $'p$, p, p', ec., sarà $r + \delta r (= pr) = \pi p'$, che si avrà cangiando x in $x+1$ nel prodotto πp; perciò $\delta z \left(= \frac{X}{pr}\right) = \frac{X}{\pi p'}$, $z = \sigma \frac{X}{\pi p'}$, ed $y = \pi p\left(\sigma \frac{X}{\pi p'} + C\right)$. Così data $y + (x+1)\delta y + a(2x+1) = 0$, sarà $-\frac{1}{p-1} = x+1$, $p - 1 = -\frac{1}{x+1}$, $p = \frac{x}{x+1}$, $\pi p = \frac{x-1}{x} \cdot \frac{x-2}{x-1} \cdot \frac{x-3}{x-2} \cdots\cdots \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{x}$, $\pi p' = \frac{1}{x+1}$, $\frac{X}{p-1} = a(2x+1)$, $X = -\frac{a(2x+1)}{x+1}$, ed $y = \frac{1}{x}(C - a\sigma(2x+1)) = (1032)\ \frac{C}{x} - ax$. Supposta costante $p = f$, saranno πf, $\pi f'$ dei prodotti f^n, f^{n+1} di f moltiplicata per se stessa tante volte n, $n+1$ quanti sono i termini che precedono y, y' nelle serie ec.${}^{(n)}y$....$''y$, $'y$, y, y', ec., ed in tal caso si avrà $y = f^n\left(C + \sigma \frac{X}{f^{n+1}}\right)$; e se sia costante anche $X = g$, il rimanente integrale $\sigma \frac{1}{f^{n+1}}$ esprimerà la somma $\frac{f^n - 1}{f^n(f-1)}$ (328) della progressione geometrica $\frac{1}{f^n}, \frac{1}{f^{n-1}} \cdots \frac{1}{f}$, cioè la somma di tutti i valori che si hanno da $\frac{1}{f^{n+1}}$ cangiando successivamente n in $n-1$, $n-2$....3, 2, 1; si avrà dunque allora $y = Cf^n + \frac{g(f^n - 1)}{f-1}$.

1138. Si scioglie con questo metodo il bel problema già proposto di sopra (358). Se come ivi, sia c la sorte al frutto semplice di m per 1, t gli anni in cui vuol consumarsi e sorte e frutto, ed x la somma costante da spendersi annualmente, supporrò che nell' anno n^{simo} la sorte sia ridotta ad y, onde tra sorte e frutti si abbia $y(1+m)$; e giacchè in quest' anno si spende x, la sorte nel seguente $(n+1)^{simo}$ sarà $y'=(m+1)y-x$, equazione da cui si ha $p=f=m+1$, $X=g=-x$, ed $y=C(m+1)^n-\frac{x((m+1)^n-1))}{m}$: ma quando gli anni sono $n=1$ si ha la sorte $y=c$; dunque $c=C(m+1)=x$, $C=\frac{c+x}{m+1}$ ed $y=\frac{x}{m}+\left(c-\frac{x}{m}\right)(m+1)^{n-1}$. Or tutto vuol consumarsi negli anni $n=t$, e perciò nell'anno $n=t+1$ dee aversi $y=0$; dunque $0=\frac{x}{m}+\left(c-\frac{x}{m}\right)(m+1)^t$, e la somma cercata $x=\frac{mc(m+1)^t}{(m+1)^t-1}$.

1139. Se $\frac{X}{\pi p'}$ non cade fra l' espressioni, di cui si é assegnato l' integrale (1132), sapendosi che supposte $'X$, $''X$, $'''X$, ec. p, $'p$, $''p$, $'''p$, ec. ciò che divengono X e p' posto in luogo di x, $x-1$, $x-2$, $x-3$, ec, deve aversi $\sigma\frac{X}{\pi p'}=$ (916) $\frac{'X}{\pi p}+\frac{''X}{\pi' p}+\frac{'''X}{\pi'' p}+$ ec., sarà dunque in tal caso $\pi p\sigma\frac{X}{\pi p'}='X+\frac{\pi p''X}{\pi' p}+\frac{\pi p'''X}{\pi'' p}+\frac{\pi p^{\prime v}X}{\pi''' p}+$ ec. Ma facendo $p=\Phi(x)$, si ha $'p=\Phi(x-1)$, $''p=\Phi(x-2)$, $'''p=\Phi(x-3)$, ec.; $\pi p=\Phi(x-1)\Phi(x-2)\Phi(x-3)\ldots 3.2.1$, $\pi' p=\Phi(x-2)\Phi(x-3)\Phi(x-4)\ldots 3.2.1$, $\pi'' p=\Phi(x-3)\Phi(x-4)\Phi(x-5)\ldots 3.2.1$, $\pi''' p=\Phi(x-4)\Phi(x-5)\ldots 3.2.1$; sarà dunque $\frac{\pi p}{\pi' p}=\Phi(x-1)='p$, $\frac{\pi p}{\pi'' p}=\Phi(x-1)\Phi(x-2)='p''p$, $\frac{\pi p}{\pi''' p}=\Phi(x-1)\Phi(x-2)\Phi(x-3)='p''p'''p$, ec., e in conseguenza $y='X+'p''X+'p''p'''X+'p''p'''p^{\prime v}X+$ec. . . . . . $+\pi pC$.

1140. Del resto la formula $y=\pi p\left(\sigma\frac{X}{\pi p'}+C\right)$ benché fondata sull' ipotesi di $\delta x=1$, può anche applicarsi al caso di $\delta x=n$, purché prima d'integrare si ponga $x=nu$. Infatti è manifesto, che allora si avrà $\delta x\,(=n)=n\delta u$; e per conseguenza $\delta u=1$.

1141. Sia anche l' equazione lineare del sedondo ordine $y+a\delta y+b\,\delta^2 y=X$, in cui a, b sono costanti, e $\delta x=1$. Applicando il metodo dei coefficienti indeterminati (1065), giungeremo primieramente all' equazione $u-m\delta u=X$, e in seguito all' altra $y=\frac{(a+m')u''-(a+m'')u'}{m'-m''}$, essendo m', m'' i due valori di m dati dall' equazione $m^2+am+b=0$, ed u', u'' i due valori di u, che resultano dal porre i valori di m in quello di u. Quanto poi all' integrale di $u-m\delta u=X$, avremo (1137) $u=\pi\left(1+\frac{1}{m}\right)\left(C-\sigma\frac{X}{m\pi\left(1+\frac{1}{m}\right)}\right)$; onde fatta la costante $1+\frac{1}{m}=h$, e però $m=\frac{1}{h-1}$, si avrà $u=h^n\left(C-\left(h-1\right)\sigma\frac{X}{h^{n+1}}\right)$ (1137), e se anche X fosse costante, verrebbe $u=Ch^n-X(h^n-1)$ (*ivi*).

1142. Sia data una serie ricorrente (383) con la scala q, $+r$, e se ne voglia il termine generale yx^n. Supposto y il generale coefficiente della serie ec. $'yx^{n-1}$, yx^n, $y'x^{n+1}$, $y''x^{n+2}$, ec. ed n il numero dei termini, la cui differenza costante è $\delta n=1$, si avrà $y''=qy'+ry$ (383): ma $y'=y+\delta y$, $y''=y+2\delta y+\delta^2 y$ (912); dunque $y+\frac{(2-q)\delta y+\delta^2 y}{1-q-r}=0$, che paragonata con l' equazione di sopra (1141) ci dà $a=\frac{2-q}{1-q-r}$, $b=\frac{1}{1-q-r}$, $X=0$, $m'=\frac{q-2+\sqrt{(q^2+4r)}}{2(1-q-r)}$; $m''=\frac{q-2-\sqrt{(q^2+4r)}}{2(1-q-r)}$, $h'=1+\frac{1}{m'}$, $h''=1+\frac{1}{m''}$, $u'=Ch'^n$, $u''=C'h''^n$ ed $yx^n=\frac{((a+m')u''-(a+m'')u')x^n}{m'-m''}$

Così, data la serie $1+2x^2+2x^3+6x^4+$ec. $=1x^0+0x^1+2x^2+2x^3+6x^4+$ec. con la scala di relazione, 1, $+2$, sarà $q=1$, $r=2$,

$a=-\frac{1}{2}$, $m'=-\frac{1}{2}$, $m''=1$, $h'=-1$, $h''=2$, $u'=C(-1)^n$, $u''=C'2^n$, $y=\frac{1}{3}C'2^{n+1}+\frac{1}{3}C(-1)^n$; e poiché fatto $n=0$, si ha dalla serie $y=1$, e fatto $n=1$ si ha $y=0$, le due equazioni $1=\frac{2}{3}C'+\frac{1}{3}C$, $0=\frac{4}{3}C'-\frac{1}{3}C$ danno $C'=\frac{1}{2}$, $C=2$ ed $yx^n=\frac{1}{3}(2^n\pm 2)x^n$, preso il segno $+$, o il segno $-$ secondo che n é pari o impari.

1143. Anche nell' analisi del *Caso* e della *Probabilità* si adoprano le differenze finite. Chiamando noi *fortuito* o *casuale* un successo, allorchè ignoriamo le cagioni, che posson farlo avvenire; siamo costretti a riguardare come *egualmente probabile* l' esistenza o inesistenza di due successi casuali, se l' uno o l' altro dovendo necessariamsnte accadere, non vi sia maggior ragione, per cui l' uno debba accader piuttosto che l' altro. Si riguarda pure come egualmente probabile l' esistenza di tre avvenimenti, che a vicenda escludendosi, mentre un di essi dee certamente aver luogo, non ci offrono intanto ragione alcuna, onde lo debba aver questo piuttosto che quello: ma qui l' inesistenza di ciascuno è *più probabile* della sua esistenza nel rapporto di 2 a 1, perchè di tre casi possibili l' inesistenza ne ha due in favore e uno solo contrario. Quindi le probabilità Π, Π' dell' esistenza o inesistenza d' un avvenimento son tanto maggiori o minori, quanto direttamente é più grande o più piccolo il numero dei casi F, C a lei favorevoli o contrarj, e quanto reciprocamente é più piccolo o più grande quello dei casi possibili P; onde sarà $\Pi=F\times\frac{1}{P}=\frac{F}{P}$ e $\Pi'=C\times\frac{1}{P}=\frac{C}{P}$; e poichè i casi favorevoli F insieme coi contrarj C formano i casi possibili P, cioé $F+C=P$, si avrà $\Pi+\Pi'=1$ ed 1 rappresenterà la *certezza*, essendo chiaro, che un avvenimento dee di certo accadere o non accadere. Trovata la probabilità, si determina la *speranza* Σ degli interessati all' esistenza dell' avvenimento, e questa speranza evidentemente risulta e dalla somma sperata S e dalla probabilità Π d' ottenerla, cioè $\Sigma=\Pi S=\frac{FS}{P}$.

1144. La probabilità fin qui considerata suppone certa la futura esistenza dell' avvenimento, sia questo favorevole, sia contrario. In tal caso la probabilità comunemente chiamasi *semplice*, e potrebbe anche chiamarsi *assoluta*. Che se l' esistenza futura dell' avvenimento è soltanto probabile, allora la probabilità divien *composta* o *relativa*. Ed è manifesto riguar-

do a questa seconda, che essa tanto diverrà maggiore o minore quanto sarà maggiore o minore la probabilità, che l'evento succeda, e che succedendo, sia favorevole ovvero contrario. Dunque per valutarla dovrà moltiplicarsi insieme la probabilità dell'evento per quella della sua qualità favorevole o contraria. La probabilità composta ha nei casi pratici maggiore estensione che la semplice. Eccone qualche applicazione.

I.° Sono in un' urna m palle bianche, n nere. B scommette contro C, che sortiranno a palle bianche prima che b palle nere. Manca a B un tiro perché guadagni, ne mancano x a C. Supponendo che le palle estratte non si ripongano nuovamente nell' urna, si domanda la probabilità dei due giuocatori.

Saranno dunque $m-a+1$ le palle bianche, $n-b+x$ le nere residue nell' urna. La lor somma $m-a+1+n-b+x$ darà il numero dei casi possibili, e fatto per comodo $m-a+1=\alpha$, $n-b=\beta$, $\alpha+\beta=\gamma$, sarà $\Pi=\frac{\alpha}{\gamma+x}$ la probabilità per il caso favorevole a B, e $\Pi'=\frac{\beta+x}{\gamma+x}$ quella per il caso contrario. Ora la probabilità di guadagnar la scommessa non si ristringe per B a quella unicamente che può avere di vincere il tiro. Perdendolo egli ha luogo di sperar nei seguenti: onde se sia y la sua totale probabilità prima del tiro, supposto ancora che questo gli sia contrario, rimarrà sempre con la probabilità $'y$, che sarà funzione di $x-1$, come y la é di x; ed è chiaro che $'y$ costituisce essa pure parte della speranza di B avanti il tiro, coll' unica differenza, che se dopo il tiro é probabilità semplice, avanti é composta, poichè dipende allora dalla probabilità della perdita del tiro stesso; onde il suo vero valore è in quel caso $'y\Pi'$, che aggiunto a Π formerà il totale della probabilità di B prima del tiro. Avremo perciò $y=\Pi+'y\Pi'=\frac{\alpha+(\beta+x)'y}{\gamma+x}$ ossia $'y-y\left(\frac{\gamma+x}{\beta+x}\right)+\frac{\alpha}{\beta+x}=0$: equazione lineare del primo ordine, che cangiato x in $x+1$, e perciò $'y$ in y ed y in y', diverrà $y'-y\left(\frac{\beta+x+1}{\gamma+x+1}\right)-\frac{\alpha}{\gamma+x+1}=0$ Per integrarla più facil-

mente particolarizzo i valori, e faccio $m=4$, $n=7$, $a=3$, $b=4$, onde $\alpha=2$, $\beta=3$, $\gamma=5$ e l'equazione diverrà $y'-y\left(\frac{4+x}{6+x}\right)-\frac{2}{6+x}=0$. Dunque (1136) $X=\frac{2}{6+x}$, $p=\frac{4+x}{6+x}$, $\pi p=\frac{2}{(5+x)(4+x)}$, $\pi p'=\frac{2}{(6+x)(5+x)}$, $\sigma\frac{X}{\pi p'}=\sigma(5+x)=\frac{x}{2}(x+9)$, ed $y=\frac{2}{(5+x)(4+x)}\left(\frac{x}{2}(x+9)+C\right)$. Per determinare la costante osservo che quando $x=0$ non resta a B alcuna speranza di vincere: onde anche $y=0$: dal che si ricava infine $y=\frac{x(9+x)}{(5+x)(4+x)}$. Sia $x=2$, sarà allora $y=\frac{11}{21}$.

II.° Determinar le sorti del Banchiere e del Puntatore al giuoco del Faraone nei casi che con $2x$ carte da sfogliarsi, si trovino nel mazzo o una o due o tre carte puntate.

Se $2x$ son le carte, si avranno (372) $x(2x-1)$ combinazioni binarie, cioè nel primo caso $2x-1$ con la carta puntata, $(2x-1)(x-1)$ senza di questa. Ora il primo sfoglio o segue con la carta puntata o senza. La probabilità di questo secondo evento è manifestamente (1143) $\frac{x-1}{x}$, quella del primo è $\frac{1}{x}$. Succedendo il secondo evento il banchiere né scapita, nè guadagna, e solo cangia la sua probabilità totale y funzione di $2x$ in $'y$ funzione di $2x-2$, che valutata prima dello sfoglio per le regole della probabilità composta varrà $\frac{x-1}{x}{'y}$. Succedendo il primo, egli può vincere o perdere, secondo che la carta puntata viene a destra o a sinistra. Or qui le combinazioni non essendo che due, l'una favorevole e l'altra contraria, la probabilità che possa aver luogo la favorevole sarà dunque $\frac{1}{2}$, e questa moltiplicata al solito per la probabilità dell'evento, varrà prima dello sfoglio $\frac{1}{2x}$. Dunque la probabilità totale del banchiere prima dello sfoglio sarà $y=\frac{x-1}{x}{'y}+\frac{1}{2x}$. Ponendo $x+1$

in luogo di x, e quindi y' per y ed y per $'y$, si avrà $y'-\frac{x}{x+1}y-\frac{1}{2(x+1)}=0$; onde (1137) $\pi p=\frac{1}{x}$, $\pi p'=\frac{1}{x+1}$, $\sigma\frac{X}{\pi p'}=\sigma\frac{1}{2}=$ (1132, 1.°) $\frac{x}{2}$, ed $y=\frac{1}{x}\left(\frac{x^2}{2}+C\right)$. Ma quando $x=0$, non resta altra speranza al banchiere, e si ha $y=0$: dunque $C=0$, e quindi $y=\frac{1}{2}$.

Nel secondo caso le combinazioni totali saranno come nel primo; quelle con una carta puntata $4(x-1)$; con due 1, senza le carte puntate $(x-1)(2x-3)$. Quindi la probabilità che non venga alcuna carta puntata al primo sfoglio sarà $\frac{(x-1)(2x-3)}{x(2x-1)}$, che ne venga una sarà $\frac{4(x-1)}{x(2x-1)}$, che ne vengan due sarà $\frac{1}{x(2x-1)}$. Non venendone alcuna, il banchiere guadagna la solita probabilità $'y$, che valutata prima dello sfoglio, diverrà $\frac{(x-1)(2x-3)}{x(2x-1)}'y$. Venendone una, abbiamo già veduto di sopra che la probabilità per il caso favorevole è $\frac{1}{2}$, che prima dello sfoglio equivarrà a $\frac{2(x-1)}{x(2x-1)}$. Ma in questo caso rimane sempre una carta puntata nel mazzo, e su questa abbiamo veduto, che il banchiere, qualunque sia il numero delle carte, ha la probabilità $\frac{1}{2}$, dunque poichè questa valutata prima dello sfoglio monta a $\frac{2(x-1)}{x(2x-1)}$, sarà perciò la totale probabilita del banchiere fondata sul secondo evento $\frac{4(x-1)}{x(2x-1)}$. Infine venendo due carte puntate o un *doppietto* il banchiere ha per le condizioni del giuoco la certezza di vincere $\frac{1}{2}$, sulla qual vincita prima dello sfoglio ha la probabilità $\frac{1}{2x(2x-1)}$. Dunque tutta quanta la probabilità del banchiere in questo secondo supposto di due

carte puntate sarà $y = \frac{(x-1)(2x-3)}{x(2x-1)}'y + \frac{8x-7}{2x(2x-1)}$, cioè, fatti i soliti cangiamenti, $y' - \frac{x(2x-1)}{(x+1)(2x+1)}y - \frac{8x+1}{2(x+1)(2x+1)} = 0$.
Avremo dunque $\pi p = \frac{x-1}{x} \cdot \frac{x-2}{x-1} \cdots \cdots \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2x-3}{2x-1} \cdot \frac{2x-5}{2x-3} \cdots\cdots \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{x(2x-1)}$, $\pi p' = \frac{1}{(x+1)(2x+1)}$, $\sigma \frac{X}{\pi p'} = \sigma \frac{8x+1}{2} = \frac{x}{2}(4x-3)$, ed $y = \frac{4x-3}{2(2x-1)}$. Si troverebbe egualmente per la probabilità del puntatore, $\frac{4x-5}{2(2x-1)}$.

Nel terzo caso le combinazioni binarie totali saranno al solito $x(2x-1)$. Quelle senza le carte puntate $(2x-3)(x-2)$; con una carta puntata $3(2x-3)$; con due 3. Dunque la probabilità che non si abbia alcuna carta puntata al primo sfoglio sarà $\frac{(2x-3)(x-2)}{x(2x-1)}$, che se ne abbia una $\frac{3(2x-3)}{x(2x-1)}$, che se ne abbiano due $\frac{3}{x(2x-1)}$. Seguendo il primo caso il banchiere non guadagna che la probabilità $'y$ di vincere nello sfoglio seguente che prima dello sfoglio verrà $\frac{(2x-3)(x-2)}{x(2x-1)}'y$. Se segue il secondo, egli ha la probabilità, che la carta gli sia favorevole, probabilità che abbiamo già trovata essere $\frac{1}{2}$, e che prima dello sfoglio vale $\frac{3(2x-3)}{2x(2x-1)}$, inoltre guadagna la probabilità sopra le due carte, che rimangono, la quale per un numero $2x$ di carte essendosi già trovata di sopra $\frac{4x-3}{2(2x-1)}$, qui in un numero $2x-2$ di carte sarà dopo il primo sfoglio $\frac{4x-7}{2(2x-3)}$, e avanti di esso $\frac{3(4x-7)}{2x(2x-1)}$; onde la probabilità intera del banchiere fondata sul

secondo evento sarà $\frac{3(3x-5)}{x(2x-1)}$. Seguendo infine il terzo, il banchiere guadagna la solita metà della scommessa, sulla quale ha dunque la probabilità $\frac{3}{2x(2x-1)}$, ed inoltre guadagna la probabilità $\frac{1}{2}$ sull'altra carta rimasta, probabilità, che prima dello sfoglio vale $\frac{3}{2x(2x-1)}$; cioè in tutto il banchiere può avere sul terzo evento la probabilità $\frac{3}{x(2x-1)}$. Dunque infine la totale speranza del banchiere sarà $y = \frac{(2x-3)(x-2)}{x(2x-1)} \cdot {}_{,}y + \frac{3(3x-4)}{x(2x-1)}$.

Fatti i soliti cangiamenti si avrà $y' - \frac{(2x-1)(x-1)}{(2x+1)(x+1)}y - \frac{3(3x-1)}{(2x+1)(x+1)} = o$, $\pi p = \frac{2x-3}{2x-1} \cdot \frac{2x-5}{2x-3} \ldots . \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{3} \times \frac{x-2}{x} \cdot \frac{x-3}{x-1}$, $\frac{x-4}{x-2} \ldots . \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{x(x-1)(2x-1)}$, $\pi p' = \frac{2}{x(x+1)(2x+1)}$, $\sigma \frac{X}{\pi p'} = \frac{3}{2} \sigma x(3x-1) = \frac{3}{2}(x^3 - 2x^2 + x) = \frac{3x}{2}(x-1)^2$. Dunque $y = \frac{2}{x(2x-1)(x-1)}\left(\frac{3x}{2}(x-1)^2 + C\right)$, cioè $y = \frac{3(x-1)}{2x-1}$, giacchè come sopra $C = o$. La probabilità del puntatore si troverebbe $= \frac{3(x-2)}{2x-1}$.

III. Sono in un' urna $x+1$ biglietti coi numeri naturali 1, 2, 3, ec., e che debbono essere estratti da altrettanti individui, a condizione che chi estrarrà un numero $=$, $<m$ otterrà un certo premio. Supposto $x > 2m$ si domanda se la probabilità di guadagnarlo sia la stessa tanto per i primi estraenti, quanto per gli ultimi. È certo quanto al primo estraente, che in $x+1$ combinazioni possibili, avendone m favorevoli ed $x+1-m$ contrarie, la probabilità per la vincita sarà per lui $\frac{m}{x+1}$, e per la perdita $\frac{x+1-m}{x+1}$.

Quanto al secondo possono aver luogo due casi differenti, cioè 1.° che nell' estrazione precedente sia sortito un numero $>$ di m; 2.° che ne sia sortito uno $=$, $o<m$. Nel primo caso egli non fa che cangiare al solito la sua probabilità y per la vincita in $'y$ funzione di x, che al principio dell' estrazione vale $\frac{'y(x+1-m)}{x+1}$. Nel secondo caso sopra i residui x biglietti ne restano per lui $m-1$ che potranno farlo vincere, onde per questo evento avrà la probabilità $\frac{m-1}{x}$, e questa pure valutata prima dell' estrazione varrà $\frac{m(m-1)}{x(x+1)}$. Quindi la probabilità totale del secondo estraente per la vincita avanti l' estrazione sarà $y=\frac{'y(x+1-m)}{x+1}+\frac{m(m-1)}{x(x+1)}$, espressione che coi consueti cangiamenti diviene $y'-\frac{y(x+2-m)}{x+2}-\frac{m(m-1)}{(x+1)(x+2)}=0$. Sarà dunque $X=\frac{m(m-1)}{(x+1)(x+2)}$; $p=\frac{x+2-m}{x+2}$, $\pi p=\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)\ldots4.3.2.1}{(x+1)x(x-1)(x-2)\ldots(x-m+2)}$, $\pi p'=\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)\ldots.3.2.1}{(x+2)(x+1)x(x-1)(x-2)\ldots\ldots(x-m+3)}$, $\sigma\frac{X}{\pi p'}=\sigma\frac{x(x-1)(x-2)(x-3)\ldots(x-m+3)}{(m-2)(m-3)(m-4)\ldots3.2.1}=\frac{x(x-1)(x-2)(x-3)(x-m+2)}{(m-1)(m-2)(m-3)\ldots3.2.1}$ (1154); ed $y=\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)\ldots.3.2.1}{(x+1)x(x-1)(x-2)\ldots.(x-m+2)}\times\left(\frac{x(x-1)(x-2)\ldots.(x-m+2)}{(m-1)(m-2)(m-3)\ldots3.2.1}+C\right)$. La costante si determina con osservare che quando $x+1=m$, non restano che m estratti tutti contrari alla perdita; onde la probabilità per la vincita si cangia allora in certezza, e diviene $y=1$. Ma la supposizione di $x+1=m$, cangia il secondo membro dell' equazione in $1+C$, avremo dunque $1=1+C$, e quindi $C=0$. Di qui è evidente la conclusione che in generale $y=\frac{m}{x+1}$, onde la probabilità del secondo estraente per la vincita e in conseguenza anche quella per la perdita sono eguali alle probabilità del primo estraente.

Questo resultato basterebbe per concludere che tutti gli altri goderanno nel seguito le stesse probabilità . ma volendo verificare l' accennata conclusione anche rapporto al terzo estraente, si osserverà che per lui posson darsi 3 casi diversi : 1.° che nei due estratti precedenti non sia sortito alcun numero $=$, $o<m$; 2.° che ne sia sortito uno; 3.° che ne siano sortiti 2 . Le combinazioni tra favorevoli e contrarie a ciascun di questi tre casi sono in tutte (374) $\frac{(x+1)x}{2}$. Quelle che favoriscono il primo caso sono $\frac{(x-m)(x+1-m)}{2}$, quelle che favoriscono il secondo sono $m(x+1-m)$, e quelle che favoriscono il terzo $\frac{m(m-1)}{2}$. La probabilità per il primo caso è dunque $\frac{(x-m)(x+1-m)}{x(x+1)}$, per il secondo $\frac{2m(x+1-m)}{x(x+1)}$, per il terzo $\frac{m(m-1)}{x(x+1)}$. Avvenendo il primo caso l' estraente cangia la sua probabilità y per la vincita, in $'y$ funzione di $x-1$, che valutata prima dell' estrazione varrà $\frac{'y(x-m)(x+1-m)}{x(x+1)}$. Avvenendo il secondo caso, nei residui $x-1$ biglietti se ne troveranno $m-1$ favorevoli alla vincita , e perciò la probabilità di quest' evento si ridurrà allora rapporto al nostro estraente a $\frac{m-1}{x-1}$, e questa pure valutata prima dell' estrazione diverrà $\frac{2m(x+1-m)(m-1)}{(x+1)x(x-1)}$. Avvenendo il terzo caso, nei soliti $x-1$ biglietti residui ne rimarranno $m-2$ favorevoli alla vincita , e la probabilità per la medesima diverrà rapporto al terzo estraente $\frac{m-2}{x-1}$, che prima dell' estrazione varrà $\frac{m(m-1)(m-2)}{(x+1)x(x-1)}$. Quindi la probabilità totale , che il terzo estraente ha di vincere sarà $y=\frac{'y\,(x-m)(x+1-m)}{x(x+1)}+$

$$\frac{2m(m-1)(x+1-m)+m(m-1)(m-2)}{(x+1)x(x-1)} = \frac{'y(x-m)(x+1-m)}{x(x+1)} + \frac{m(m-1)(2x-m)}{(x+1)x(x-1)}.$$ Cangiate y, $'y$, x in y', y, $x+2$, potrà dedursi $y' - \frac{y(x+2-m)(x-m+3)}{(x+2)(x+3)} - \frac{m(m-1)(2x+4-m)}{(x+1)(x+2)(x+3)} = 0$, equazione, nella quale essendo $\delta x = 2$, dovremo per integrarla cangiare x in $2u$ (1140), e fare in conseguenza $y' - \frac{y(2u+2-m)(2u-m+3)}{(2u+2)(2u+3)} - \frac{m(m-1)(4u+4-m)}{(2u+1)(2u+2)(2u+3)} = 0$. Si avrà dunque $X = \frac{m(m-1)(4u+4-m)}{(2u+1)(2u+2)(2u+3)}$; $p = \frac{(2u+2-m)(2u+3-m)}{(2u+2)(2u+3)}$; $\pi p =$

$$\frac{(2u-m)(2u-2-m)(2u-4-m)\ldots\ldots m(m-2)(m-4)\ldots\ldots 4.2}{2u(2u-2)(2u-4)\ldots\ldots(m+4)(m+2)} \times$$

$$\frac{(2u-m+1)(2u-m-1)(2u-m-3)\ldots\ldots(m-1)(m-3)\ldots\ldots 3.1}{(2u+1)(2u-1)(2u-3)\ldots\ldots(m+3)(m+1)} =$$

$$\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)\ldots\ldots 4.3.2.1}{(2u+1)2u(2u-1)(2u-2)\ldots\ldots(2u-m+2)};\ \pi p' =$$

$$\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)\ldots\ldots 4.3.2.1}{(2u+3)(2u+2)(2u+1)2u(2u-1)(2u-2)\ldots\ldots(2u-m+4)};$$

$$\sigma\frac{X}{\pi p'} = \sigma\frac{2u(2u-1)(2u-2)\ldots\ldots(2u-m+4)(4u+4-m)}{(m-2)(m-3)(m-4)\ldots\ldots 4.3.2.1} =$$

$\frac{2u(2u-1)(2u-2)\ldots\ldots(2u-m+2)}{(m-1)(m-2)(m-3)\ldots\ldots 4.3.2.1}$; onde restituito il valore di $2u=x$, verrà $y = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots\ldots 3.2.1}{(x+1)x(x-1)(x-2)\ldots\ldots(x-m+2)} \times$ $\left(\frac{x(x-1)(x-2)\ldots\ldots(x-m+2)}{(m-1)(m-2)\ldots\ldots 3.2.1}+C\right)$, e poichè quando $x+1=m$ la probabilità y si cangia evidentemente in certezza, e si ha $y=1$, dal che risulta $C=0$, dunque infine $y = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots 3.2.1}{(x+1)x(x-1)(x-2)\ldots(x-m+2)} \times \frac{x(x-1)(x-2)\ldots(x-m+2)}{(m-1)(m-2)\ldots 3.2.1} = \frac{m}{x+1}$, come si era già detto.

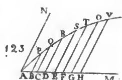
FINE



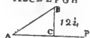
INDICE
DELLA SECONDA PARTE

Pag.	vers.	Errori	Correzioni
11	18	due sezioni staccate . .	due sezioni, chiamate *Iperbole*, staccate
15	18	ai raggi vettori FM, OM	al raggio vettore FM e ad CM
25	6	$\frac{x}{2}$	x
52	1	*Fig.* 145.	146
	4	*Fig.* 146.	147
87	38	(684. 4°).	(864. 2.°)
88	34	C'H', HH'	HH', CH'
89	24	traccie verticali . . .	projezioni verticali
	25	traccia orizzontale . .	projezione orizzontale
94	18	(872)	(874)
	20	$\cos\theta$	$\cos^2\theta$
	21	$\cos\theta'$	$\cos^2\theta'$
95	15	$\operatorname{sen}\theta$	$\operatorname{sen}^2\theta$
	16	$\operatorname{sen}\theta'$	$\operatorname{sen}^2\theta'$
161	2	(1005. 5.°)	(1008. 1.°)
	14	(1005. 5.°)	(1008. 1.°)
	20	(818)	(819)
162	23	$(\sqrt{a^2+b^2-n^2})$	$\sqrt{(a^2+b^2-n^2)}$
165	13	$\left(\frac{dx}{dy}\right)=0$	$\left(\frac{dz}{dx}\right)=0$
195	23	$uYdY$	$uYdy$
200	7	(410)	(396. 5.°)

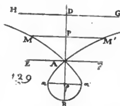




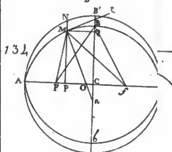
N
P Q R S T O V
123
A B C D E F G H M



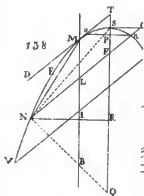
B
124
A C P



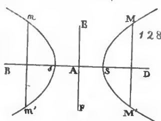
H D G
M P M'
E A F
129
B



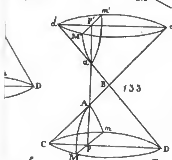
N B' t
M B
131
A F P O C f
b



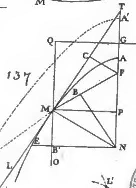
T
S
M P
138
F
D E
L
N I R
V B
Q



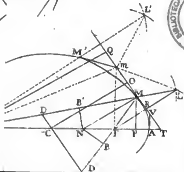
m E M
128
B A S D
m' F M'



d P' m' c
M'
a
D
B 133
A
m
C P D
M

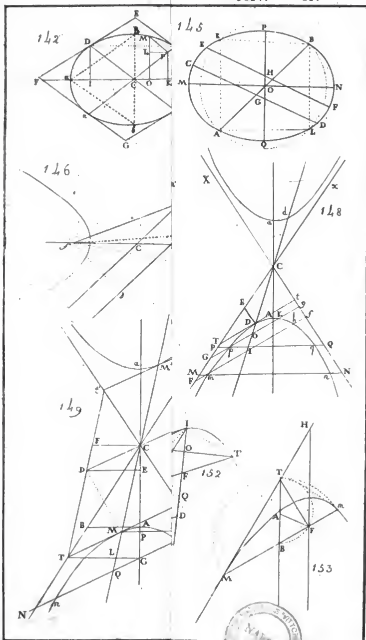


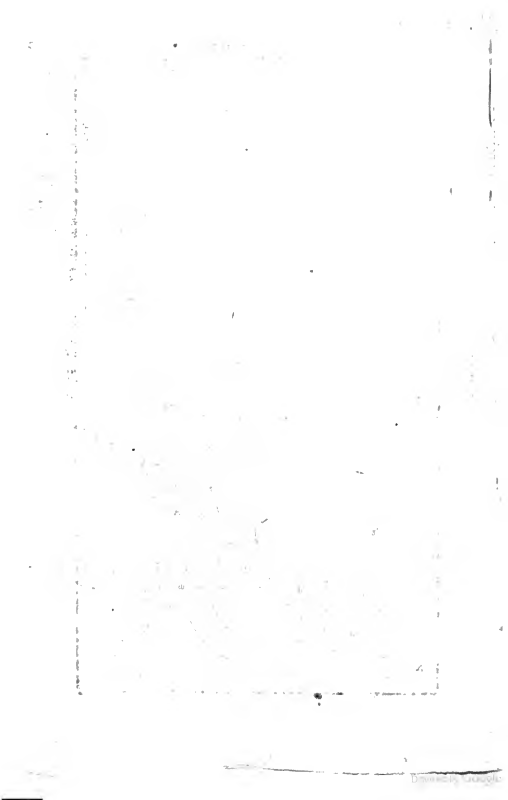
T
A'
Q G
C A
F
137
B
M P
E
B' N
M L O

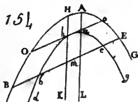


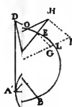
L'
M' Q
m
O
M
D B' R V
C N P A T
B
D

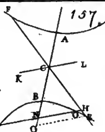


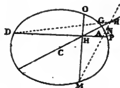

142
145
146
148
149
152
153

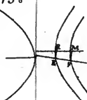


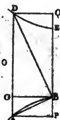

151
H
A
O
E
G
B
m
K
L
d
g

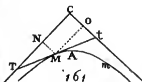

D
H
O
E
G
L
I
A'
B

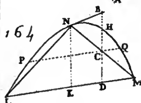

F
157
A
K
L
B
M
N
H
O

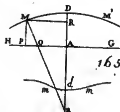

O
G
H
D
A
N
P
H
C
M

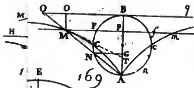

158

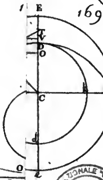

D
Q
E
160
G
B
A
P


C
O
N
t
M
A
T
161
m


N
H
164
Q
P
C
L
K
D
M


D
M
M'
R
H
P
O
A
G
165
d
m
m
B


Q
O
B
q
M
F
P
H
M
f
m
C
c
N
G
T
169
A
n


E
V
D
O
C
d


172
p
Q'
n
N'



m
M
170
F
B
O
G
P
E
T A
Q

TAV. IX.

177

178

185

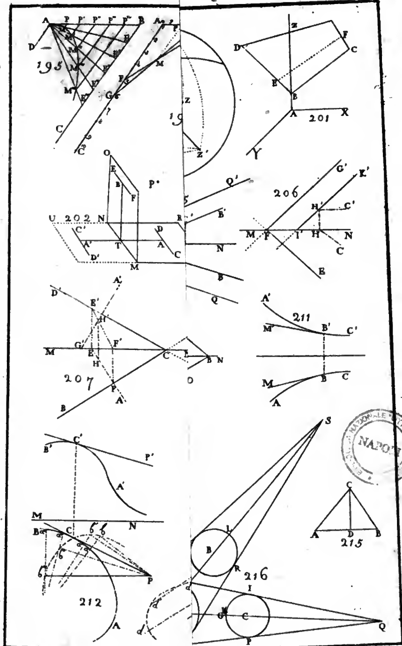
180

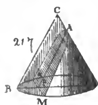
186

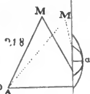
190

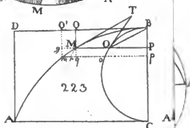
191

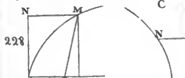
194

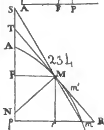

195
201
202
206
207
211
212
215
216

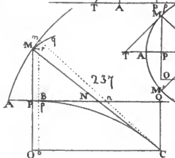

217

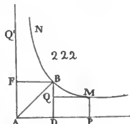

218

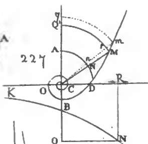

223

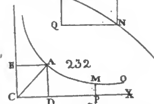

228

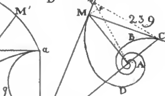

234

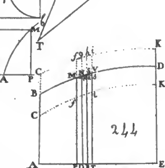

237

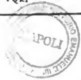

222


227




232


239


244

